

### Урок 1. Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа

#### План уроку

1. Точки локального екстремуму.
2. Теорема Ферма та її графічна ілюстрація.
3. Теорема Ролля та її графічна ілюстрація.
4. Теорема Лагранжа та її графічна ілюстрація.
5. Доведення твердження про наявність нулів похідної функції залежно від кількості нулів функції  $f(x)$ .

#### Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П].

#### Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Теорію подавайте глибоко за змістом, але стисло за формою.
- 2) Формулюйте мотиваційні запитання, які запропоновані на початку уроку.
- 3) Весь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 4) Основним елементом уроку є ознайомлення учнів з класичними теоремами про застосування похідної, їхнім геометричним змістом та ідеями доведення.
- 5) Історичні відомості подавайте дозовано, за наявності часу.
- 6) Оскільки тема уроку має важливий теоретичний характер, то запропонуйте учням/ученицям вивчити доведення всіх теорем уроку. Це й може бути домашнім завданням.

## I. Організаційна частина (2 хв)

### Мотиваційні запитання

- 1) Який геометричний зміст похідної?
- 2) За яких умов дотична до графіка диференційовної функції буде паралельна до осі абсцис або збігатися із нею?
- 3) Як визначити кутовий коефіцієнт прямої за координатами двох точок на цій прямій?
- 4) Наведіть приклад монотонної функції, похідна якої хоча-б при одному значенні аргументу перетворюється на нуль.
- 5) Яка умова паралельності двох похилих прямих в декартовій системі координат?

## II. Повторення

1. Знайдіть формулу похідної для функції  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ .

- А  $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$   
Б  $f'(x) = 9x^2 + 4x + 1$   
В  $f'(x) = 9x^3 + 4x^2 + x$   
Г  $f'(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$   
Д інша відповідь

2. Знайдіть похідну функції  $f(x) = \sin(\pi x)$  у точці  $x_0 = 2$ .

| А     | Б      | В | Г | Д              |
|-------|--------|---|---|----------------|
| $\pi$ | $2\pi$ | 0 | 1 | інша відповідь |

3. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  у точці графіка (1; 0).

| А | Б  | В   | Г    | Д              |
|---|----|-----|------|----------------|
| 1 | -1 | 0,5 | -0,5 | інша відповідь |

4. Знайдіть абсцису такої точки графіка функції  $y = 2x^2 + 3x - 5$ , в якій дотична паралельна до осі абсцис.

| А | Б | В  | Г    | Д              |
|---|---|----|------|----------------|
| 0 | 1 | -1 | -1,5 | інша відповідь |

5. Розв'яжіть рівняння  $f'(x) = 0$ , за умови, що  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 30$ .

| А    | Б      | В     | Г     | Д              |
|------|--------|-------|-------|----------------|
| 2; 3 | -2; -3 | -2; 3 | -1; 6 | інша відповідь |

## Як я вирішую певну проблему із ЗНО/НМТ 2025 року?

**Задача.** Відомо, що  $x_0 = 3$  — точка екстремуму функції  $f(x)$ , яка має похідну в кожній точці на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Знайдіть похідну функції  $g(x) = 2f(x) - 8x^3 + 5$  у точці з абсцисою  $x_0 = 3$ .

## II. Точки локального екстремуму

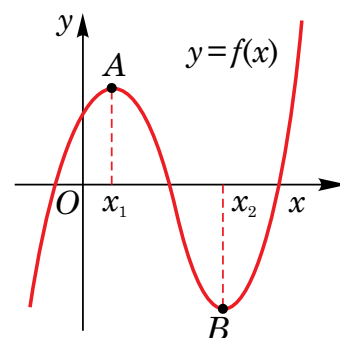
При дослідженні властивостей функцій важливу роль відіграють точки локальних екстремумів — мінімумів та максимумів.

Їх легко побачити на графіку функції — це абсиси найвищих точок «вершин» та найнижчих точок «западин».

Так, на рисунку  $x_1$  — точка максимуму, а  $x_2$  — точка мінімуму. Обидві ці точки називають точками екстремуму.

**Означення.**  $x_1$  — **точка максимуму** функції  $y = f(x)$ , якщо для будь-якого значення змінної  $x$  з деякого інтервалу  $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$  виконується нерівність  $f(x) \leq f(x_0)$ .

**Означення.**  $x_2$  — **точка мінімуму** функції  $y = f(x)$ , якщо для будь-якого значення змінної  $x$  з деякого інтервалу  $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$  виконується нерівність  $f(x) \geq f(x_0)$ .



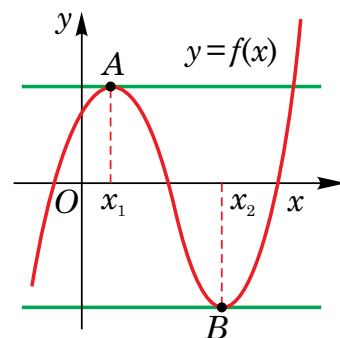
Якщо функція є диференційовною в точках локального екстремуму, то для її похідної в таких точках виконується спеціальна умова (необхідна умова існування екстремуму).

## III. Теорема Ферма та її графічна ілюстрація

**Теорема Ферма. Необхідна умова існування екстремуму.** Якщо  $x_0$  — точка екстремуму функції та існує  $f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

Дана теорема означає, що в точці екстремуму диференційовної функції дотична до графіка є паралельною осі абсцис, або збігається з нею.

**Зауваження.** Умова  $f'(x_0) = 0$  є лише необхідною для точок екстремуму диференційованої функції, але не достатньою. Наприклад, для функції  $y = x^3$  похідна при  $x_0 = 0$  дорівнює 0, але дана точка не є ні точкою мінімуму, ні точкою максимуму. Натомість дотична в ній збігається з віссю абсцис.



**Доведення теореми Ферма.** Розглянемо випадок, коли  $x_0$  є точкою максимуму.

При  $x \in (x_0; x_0 + \delta)$  розглянемо додатний приріст аргументу  $\Delta x = x - x_0$  та дріб 
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

За означенням точки максимуму, чисельник дробу буде не додатним, тож

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Розглянемо праву границю функції  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  та скористаємося диференційованістю функції  $f(x)$  в точці  $x_0$ :

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \text{ при } x \in (x_0; x_0 + \delta), \text{ тому } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \leq 0.$$

Аналогічно, отримуємо  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$  при  $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ , тому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0.$$

Оскільки  $f'(x_0) \leq 0$  та  $f'(x_0) \geq 0$ , то отримуємо рівність:  $f'(x_0) = 0$ .

Випадок, коли  $x_0$  є точкою мінімуму, доводиться аналогічно.

Теорему доведено.

## IV. Теорема Ролля та її графічна ілюстрація

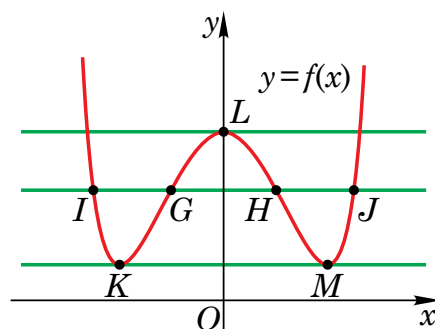
Теорема Ферма показує умову, яка виконується для точок екстремуму диференційовної функції:  $f'(x_0) = 0$ . А ось достатню умову виконання рівності  $f'(x_0) = 0$  для деякої точки  $x_0$  маємо з теореми Ролля.

**Теорема Ролля.** Достатня умова наявності нулів похідної на проміжку.

Нехай функція  $y = f(x)$  є неперервною на відрізку  $[a; b]$ , диференційовною у будь-якій точці інтервалу  $(a; b)$  і при цьому  $f(a) = f(b)$ . Тоді на інтервалі  $(a; b)$  існує точка  $x_0$ , для якої  $f'(x_0) = 0$ .

Дана теорема означає, що для «гладкої» функції між двома аргументами з однаковим значенням функції існує точка, в якій дотична до графіка є паралельною осі абсцис, або збігається з нею (див. рисунок).

Так, на рисунку між точками графіка  $I, G$  із однаковими ординатами міститься точка  $K$ , дотична до графіка в якій паралельна осі абсцис. Аналогічно між точками  $G, H$  з однаковими ординатами міститься точка  $L$ , в якій дотична до графіка паралельна осі абсцис. Аналогічна ситуація і з точкою  $M$  між точками  $H, J$ .



**Зауваження.** Можна розглянути цікавий **механічний зміст теореми Ролля**.

Якщо деяке тіло рухалося уздовж прямої, а в початковий і кінцевий моменти часу знаходилося в одній точці, то хоча б в один момент часу між ними його швидкість дорівнювала нулю (у найпростішому випадку воно рухалося в одному напрямку, потім зупинилося і стало рухатися у протилежному).

Це легко впливає з теореми Ролля з урахуванням механічного змісту похідної:  $x'(t) = v(t)$ , якщо розглядати рух тіла уздовж осі  $Ox$ .

Теорема Ролля є важливим, але частковим випадком теореми Лагранжа. Тому можна не доводити її окремо, якщо при цьому довести теорему Лагранжа.

## V. Теорема Лагранжа та її графічна ілюстрація

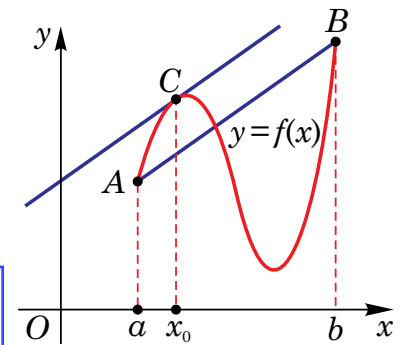
Теорема Ролля за певних умов гарантує наявність горизонтальної дотичної до графіка. Теорема Лагранжа досліджує наявність дотичної, що перетинає вісь абсцис під певним кутом (для випадку нульового кута паралельна до осі абсцис або збігається з нею).

**Теорема Лагранжа. Формула скінченних приростів.** Нехай функція  $y = f(x)$  є неперервною на відрізку  $[a; b]$ , диференційована у будь-якій точці інтервалу  $(a; b)$ . Тоді на інтервалі  $(a; b)$  існує точка  $x_0$ , для якої

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Дана теорема означає, що для «гладкої» функції, заданої на відрізку, існує точка, в якій дотична до графіка є паралельною до відрізка, що з'єднує «кінцеві точки» графіка, або містить цей відрізок.

На рисунку між точками графіка  $A, B$  міститься точка  $C$ , дотична до графіка в якій паралельна відрізку  $AB$ .



**Зауваження.** При  $f(a) = f(b)$  теорема Лагранжа перетворюється на теорему Ролля. Тому, якщо довести теорему Лагранжа, теорема Ролля буде доведена автоматично.

**Зауваження.** Можна розглянути цікавий **механічний зміст теореми Лагранжа**.

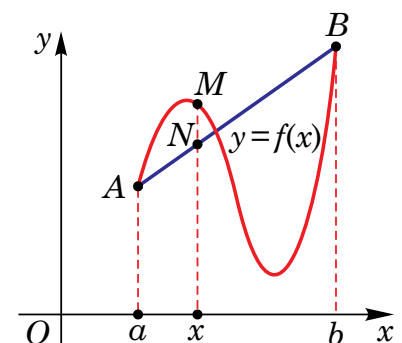
Якщо деяке тіло рухалося уздовж прямої, то хоча б в один момент часу між початком та кінцем руху його миттєва швидкість дорівнювала середній швидкості упродовж даного руху.

Це легко випливає з теореми Лагранжа з урахуванням механічного змісту похідної. Дійсно, нехай:  $f(t)$  — відстань (координата) тіла при русі уздовж осі  $Ox$  у момент часу  $t$ , тоді  $f'(t_0) = v(t_0)$ , а середня швидкість протягом проміжку часу від  $t = a$  до  $t = b$  дорівнює зміні відстані, поділеній на витрачений час:  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Доведемо теорему Лагранжа.** Розглянемо функцію, яка з точністю до знаку дорівнює відстані уздовж вертикального напрямку між відрізком  $AB$  та графіком функції (на рисунку це різниця ординат точок  $M$  та  $N$ ).

Ордината точки  $M$  дорівнює  $f(x)$ .

Тангенс кута нахилу прямої  $AB$  до додатного напрямку осі абсцис дорівнює  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Пряма  $AB$  має рівняння



виду:  $y(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + n$ . Оскільки ця пряма проходить через точку  $A$ , то:  
 $f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a + n$ , звідки  $n = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a$ .

Тому рівняння прямої  $AB$  має вигляд:  $y(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a$  як і ордината точки  $N$ . Розглянемо функцію різниці ординат точок  $M$  та  $N$ :

$$h(x) = f(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a \right).$$

Вона є неперервною на відрізку  $[a; b]$ , тож для неї справджується II теорема Вейерштрасса.

Таким чином, на відрізку  $[a; b]$  існують точки, в яких ця функція набуває найбільшого (найменшого) значення на цьому відрізку.

Розглянемо тепер два випадки.

1) Хоча б одна з точок, де функція  $h(x)$  набуває на  $[a; b]$  найбільше (найменше) значення, не збігається з кінцями цього відрізка. Нехай це точка  $x_0$ . Тоді вона буде, за означенням, точкою локального максимуму (мінімуму) функції  $h(x)$ . За теоремою Ферма,  $h'(x_0) = 0$ . Тому:  $h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ , звідки й отримуємо існування такої точки  $x_0 \in (a; b)$ , для якої  $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

2) Нехай точки, в яких функція  $h(x)$  набуває найбільше та найменше значення на відрізку  $[a; b]$  збігаються з точками  $a$  та  $b$ . Але  $h(a) = h(b) = 0$  і тому  $\max_{[a; b]} h(x) = \min_{[a; b]} h(x) = 0$ . З цього випливає, що функція  $h(x)$  тотожно дорівнює нулю на всьому відрізку  $[a; b]$ , а її похідна у будь-якій внутрішній точці  $x_0$  цього відрізка дорівнює нулю:

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

звідки й випливає потрібне твердження.

Теорему доведено.

Розглянемо інші форми запису висновку з теореми Лагранжа, що їх зручно використовувати при подальшому розвитку теорії та при розв'язуванні задач.

$$f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \Theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x, \Theta \in (0; 1) \text{ — формула скінченних приростів.}$$

## VI. Доведення твердження про наявність нулів похідної функції залежно від кількості нулів функції $f(x)$

**Теорема про наявність нулів похідної.** Між двома нулями диференційовної функції лежить принаймні один нуль її похідної. Зокрема, якщо диференційовна функція має  $n$  нулів, то її похідна має не менш як  $n - 1$  нулів.

**Доведення.** Нехай диференційована функція  $f(x)$  перетворюється на нуль у точках  $x_1; x_2$ , причому  $x_1 < x_2$ . Тоді на відрізку  $[x_1; x_2]$  виконуються умови теореми Ролля. Отже, існує точка  $x_0 \in (x_1; x_2)$ , для якої  $f'(x_0) = 0$ . Твердження доведено.

## Історичні відомості

Твердження, що нині відоме як теорема Ферма про екстремуми, було в іншій формі висунуто французьким вченим Миколою Орезмським у 14 ст., у його вченні про широту та довготу. У 17 столітті ці ідеї були розвинуті декількома вченими. Так, у Ісаака Ньютона цей факт згадувався як «принцип зупинки», а саме: «коли величина є найбільшою чи найменшою з усіх можливих, вона в цей момент не тече ні вперед, ні назад». Але Ньютон зізнавався, що до створення ним математичного аналізу його підштовхнули праці Ферма.



Цікаво, що знання факту, описаного в теоремі Ролля, приписують індійському математику Бхаскару II (1114—1185). Хоча теорема названа на честь Мішеля Ролля, його доведення 1691 року охоплює лише випадок багаточленів. Теорема вперше була доведена Коші в 1823 році, який пов'язав її із теоремою Лагранжа. Сама назва «теорема Ролля» була вперше використана Морицем Вільгельмом Дробішем в Німеччині в 1834 році.

Формула кінцевих приростів, що була сформульована та обґрунтована Лагранжем у 18 столітті, стала найважливішим підґрунтям для розв'язування проблем за допомогою похідної. Разом із теоремами Ферма та Ролля, вона стала класикою математичного аналізу.

**Висновок.** Одним з найважливіших способів застосування похідної є дослідження функцій. Класичними результатами, що стають у нагоді при такому дослідженні є теорема Ферма про необхідну умову екстремуму функції та теореми Ролля та Лагранжа. При цьому теорема Лагранжа та її наслідки будуть так чи інакше використовуватися практично в усіх теоретичних результатах та задачах з теми «Застосування похідної».

## VII. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

**Задача.** Відомо, що  $x_0 = 3$  — точка екстремуму функції  $f(x)$ , яка має похідну в кожній точці на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Знайдіть похідну функції  $g(x) = 2f(x) - 8x^3 + 5$  у точці з абсцисою  $x_0 = 3$ .

*Розв'язання.* За теоремою Ферма,  $f'(x) = 0$ .

Тоді:  $g'(x) = 2f'(x) - 24x^2$ , а отже  $g'(3) = 2f'(3) - 24 \cdot 3^2 = 0 - 216 = -216$ .

*Відповідь.*  $-216$ .

## VIII. Рефлексія (1–2 хв)

- |           |                                                                     |                        |    |
|-----------|---------------------------------------------------------------------|------------------------|----|
| <b>1.</b> | Я знаю означення точок локального екстремуму.                       |                        |    |
|           | Так                                                                 | Ще треба потренуватися | Ні |
| <b>2.</b> | Я знаю формулювання теореми Ферма про екстремуми.                   |                        |    |
|           | Так                                                                 | Ще треба потренуватися | Ні |
| <b>3.</b> | Я знаю формулювання теореми Ролля.                                  |                        |    |
|           | Так                                                                 | Ще треба потренуватися | Ні |
| <b>4.</b> | Я знаю формулювання теореми Лагранжа.                               |                        |    |
|           | Так                                                                 | Ще треба потренуватися | Ні |
| <b>5.</b> | Я знаю геометричний зміст теорем Ферма, Ролля і Лагранжа.           |                        |    |
|           | Так                                                                 | Ще треба потренуватися | Ні |
| <b>6.</b> | Я розумію зв'язок між кількістю нулів функції та нулів її похідної. |                        |    |
|           | Так                                                                 | Ще треба потренуватися | Ні |