

Урок 10. Найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) познайомитеся з постановкою задачі про найбільше (найменше) значення функції на відрізку;
- 2) познайомитеся з графічною ілюстрацією задачі про найменше та найбільше значення неперервної на відрізку функції;
- 3) повторите поняття локального мінімуму та локального максимуму;
- 4) навчитеся знаходити найбільше та найменше значення функції на відрізку за допомогою похідної.

II. Постановка й практична важливість задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку

Більшу частину своїх зусиль люди витрачають на пошук найкращого, тобто оптимального, рішення поставленої задачі. Як за рахунок обмежених ресурсів отримати найкращий рівень життя, найвищої продуктивності праці, найменших витрат, найбільшого прибутку, мінімального витраченого часу тощо.

У фізиці часто виникає потреба знайти максимальне або мінімальне значення певної величини. Наприклад, при вивченні руху тіла за заданим законом координата або швидкість описуються функцією часу. Максимальна висота, якої досягає тіло, кинуте вертикально вгору, — це найбільше значення функції висоти на певному проміжку часу.

В інженерії подібні задачі виникають при проектуванні конструкцій. Наприклад: мінімальна товщина балки, яка витримує навантаження; максимальна допустима напруга в матеріалі; оптимальна форма деталі для зменшення витрат матеріалу.

У фінансах аналізують: мінімальний ризик при інвестуванні; максимальний дохід за умови заданого бюджету.

У біології та медицині часто досліджують процеси росту та зміни характеристик організмів: максимальна концентрація ліків у крові; мінімальна ефективна доза препарату; оптимальний час дії медикаменту. Наприклад, концентрація ліків у крові змінюється з часом за певним законом. Щоб лікування було безпечним і ефективним, необхідно знати максимальне значення цієї концентрації на заданому проміжку часу.

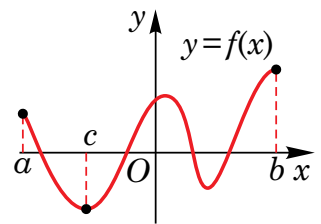
У програмуванні й комп'ютерних науках задачі оптимізації виникають постійно. Наприклад: мінімальний час виконання алгоритму; мінімальне споживання пам'яті; максимальна пропускна здатність мережі.

Не всі такі задачі можна розв'язати суто математичними методами, не до всіх можна застосувати похідну функції з однією змінною.

Однак частина таких проблем зводиться до відшукування найбільшого або найменшого значень функції на відрізку. Для неперервних на цьому відрізку функцій наявність найбільшого та найменшого значень гарантує друга теорема Вейерштрасса. А ось для знаходження таких значень доцільно застосувати похідну та критичні точки.

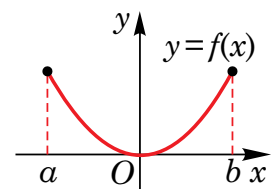
III. Графічна ілюстрація поставленої задачі

Нехай на даному відрізку $[a; b]$ розглядається неперервна функція $y = f(x)$. За другою теоремою Вейерштрасса, на цьому відрізку існують точки, в яких ця функція набуває, відповідно, найбільшого та найменшого значень. Кількість таких точок може бути різною. Їх розташування — також (див. рисунок).



Для функції, графік якої подано на рисунку, найбільше значення досягається тільки на кінці відрізка (при $x = b$), а найменше — у внутрішній точці c даного відрізка.

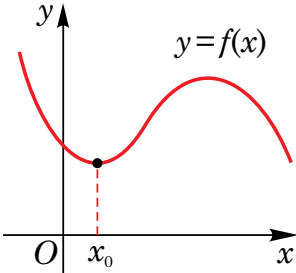
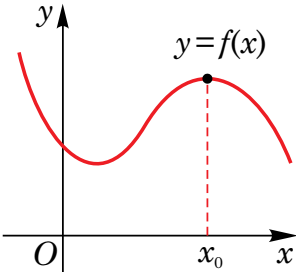
Неважко уявити собі й інші ситуації. Наприклад, коли найбільше значення досягається одночасно в двох точках, а найменше — в одній точці (див. рисунок).



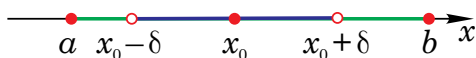
Таким чином, задача знаходження найбільшого (найменшого) значення неперервної функції на відрізку зводиться до знаходження найвищих (найнижчих) точок графіка функції на даному відрізку. При цьому таких точок може бути декілька зокрема їхніми абсцисами можуть бути кінці відрізка.

IV. Поняття локальних точок екстремуму

Пригадаємо поняття точок локального екстремуму — мінімуму та максимуму.

Вид точки локального екстремуму	Означення та графічна ілюстрація	Примітка
Точка локального мінімуму.	 x_0 — точка мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.	Точка мінімуму: $x_{\min} = x_0$. Мінімум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\min} = f(x_0)$.
Точка локального максимуму.	 x_0 — точка максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.	Точка максимуму: $x_{\max} = x_0$. Максимум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\max} = f(x_0)$.

Зрозуміло, що у випадку, коли найменше (найбільше) значення функції на відрізку $[a; b]$ досягається у деякій внутрішній точці x_0 цього відрізка, то ця точка буде точкою локального екстремума. Дійсно, в такій ситуації знайдеться δ -окіл точки x_0 , який цілком міститься у відрізку $[a; b]$ і на ньому справджується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$), оскільки відповідна нерівність має місце на всьому відрізку $[a; b]$ (див. рисунок).



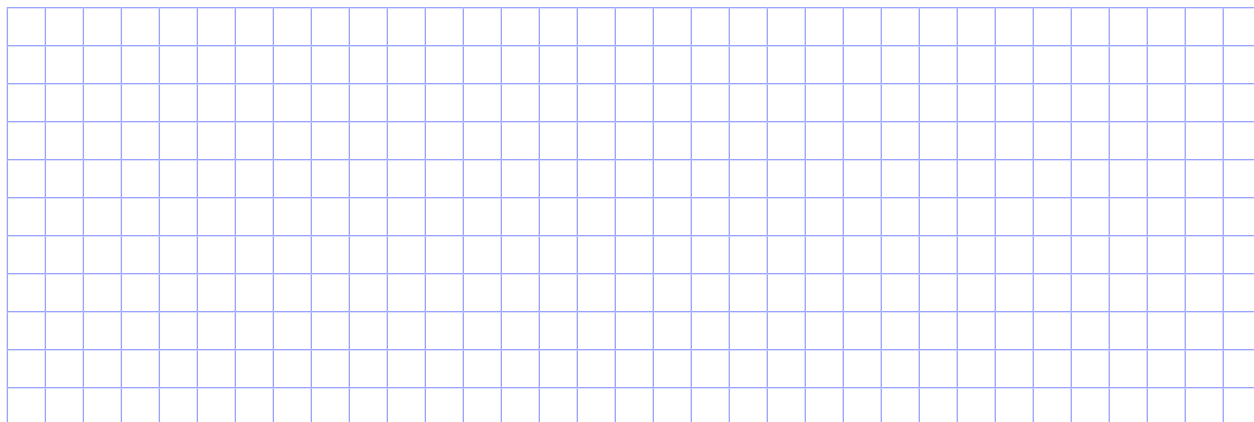
Таким чином, найменше (найбільше) значення неперервної функції на відрізку може досягатися в точках локального екстремума або в одному чи обох кінцях цього відрізка.

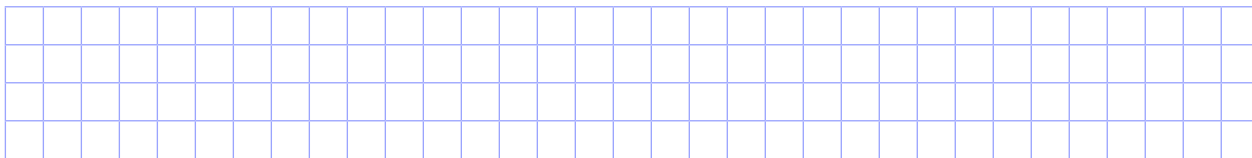
V. Схема знаходження найбільшого або найменшого значень функції на відрізку.

Оскільки неперервна на відрізку функція, за теоремою Вейерштрасса, досягає свого найбільшого (найменшого) значення в деяких точках цього відрізка, то задача полягає у знаходженні цих точок. Якщо це внутрішні точки відрізка, то вони є точками локального екстремуму, а тому й критичними точками. Якщо ж ні, — то залишаються лише кінці відрізка, а значення функції у них можна порахувати окремо. Звідси випливає наступна схема знаходження найбільшого (найменшого) значення неперервної на відрізку функції, що має на ньому скінченну кількість критичних точок.

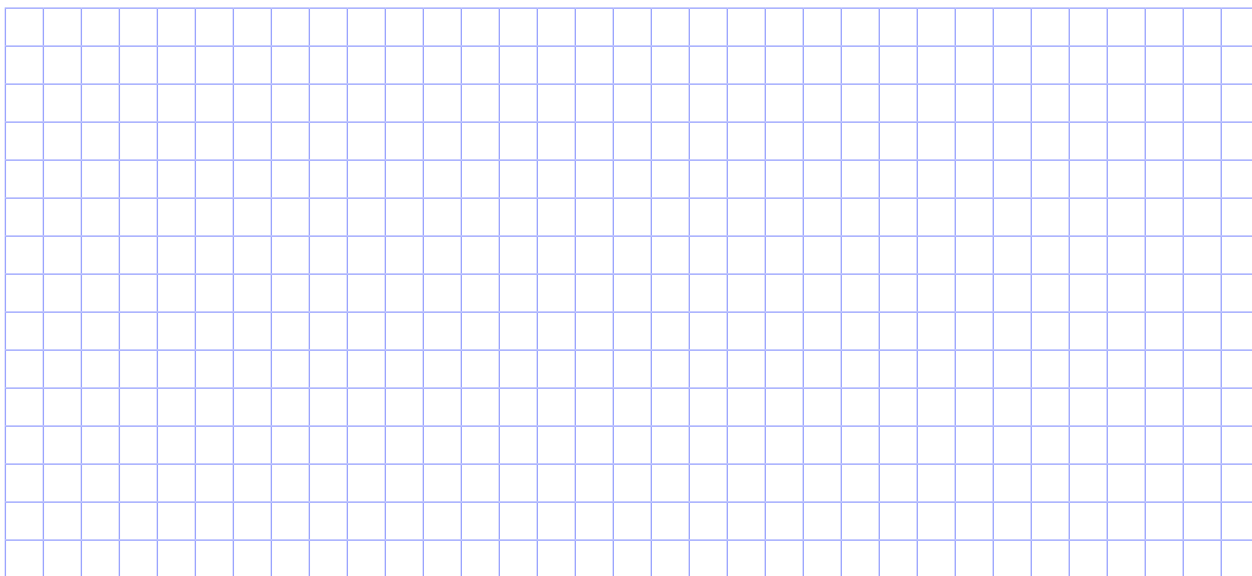
Схема знаходження найбільшого (найменшого) значень неперервної функції на відрізку	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x + 1}, x \in [0; 3]$
1. Знайдіть критичні точки даної функції, які належать даному відрізку.	$f'(x) = \frac{2x \cdot (x + 1) - 1 \cdot (x^2 + 8)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0,$ $\begin{cases} x = -4, \\ x = 2, \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$ $x \in [0; 3];$
2. Знайдіть значення функції у всіх знайдених критичних точках та окремо на кінцях відрізка.	$f(0) = \frac{0^2 + 8}{0 + 1} = 8,$ $f(2) = \frac{2^2 + 8}{2 + 1} = 4, \quad f(3) = \frac{3^2 + 8}{3 + 1} = 4 \frac{1}{4}.$
3. Порівняйте знайдені значення функції та оберіть із них найбільше (найменше). Ці значення й будуть найбільшим (найменшим) значеннями функції на відрізку.	$\max_{[0;3]} f(x) = f(0) = 8,$ $\min_{[0;3]} f(x) = f(2) = 4.$

Приклад 1. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = \sqrt{2} \sin x - x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.





Приклад 2. Периметр прямокутника дорівнює 20 см. При яких довжинах сторін цей прямокутник матиме найбільшу площу?



VI. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему із ЗНО/НМТ 2026 року?

Задача. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 30, & x < -2, \\ 2x^4 + x, & x \geq -2 \end{cases}$. Обчисліть значення виразу $f(-3) - f'(2)$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

- Знайдіть найбільше та найменше значення функції на відрізку:
а) $y = x - \frac{1}{3}x^3, [-2; 0]$; б) $y = \frac{x}{x^2 + 1}, [0; 2]$; в) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}, x \in [-3; 0]$.
- Подайте число 12 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб їх добуток був найбільшим.
- Подайте число 10 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.
- Тіло, кинуте вертикально вгору, рухається за законом $h(t) = 8t - t^2$, де h — висота (у метрах), t — час (у секундах). Визначте, в який момент часу тіло досягне найбільшої висоти та яким буде її значення в цей момент.
- Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 18t^2 - t^3$, де x — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Визначте, в який момент часу із проміжку $[4; 8]$ швидкість точки буде найбільшою, та знайдіть значення швидкості в цей момент.

6. Парканом задовжки 400 м треба відгородити на березі річки прямокутне пасовисько найбільшої площі. Якими мають бути його розміри?



Рівень В

1. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на відрізку:

а) $y = (x+1)^2(x-1), [-2; 0]$; б) $y = x + \cos^2 x, \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

в) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x-1}, x \in [-3; 0]$.

2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на відрізку та точки, в яких ці значення досягаються:

а) $y = (x+1)^2(x-3)^2, [-2; 2]$; б) $y = 2\cos^2 x + \cos 2x, \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$;

в) $y = 2\sin 2x + \cos 4x, \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

3. Знайдіть довжини сторін прямокутника найбільшої площі, вписаного в коло даного радіуса R .

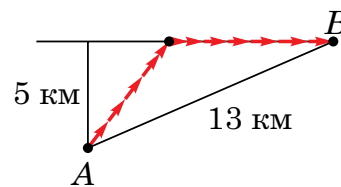
4. В системі координат через точку $A(2; 4)$ проведено пряму, яка перетинає осі координат в додатних точках. Якими мають бути сторони отриманого прямокутного трикутника, щоб його площа була мінімальною?

5. Подайте число 20 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток одного з них на куб другого був найбільшим.

6. Число 8 поділіть на два недодатних доданки таким чином, щоб сума їхніх кубів була найбільшою.

7. Знайдіть сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного у півкруг з радіусом R таким чином, щоб дві сусідні вершини лежали на діаметрі, а дві інші — на півколі, що обмежує даний півкруг.

8. Із пункту A (див. рисунок), що знаходиться в лісі на відстані 5 км від прямолінійного шосе, пішоходу треба потрапити у пункт B , що знаходиться на цьому ж шосе на відстані 13 км від пункту A . Уздовж шосе пішохід рухається зі швидкістю 5 км/год, а по лісу — зі швидкістю 3 км/год. За який мінімальний час пішохід зможе потрапити з пункту A у пункт B ?



9. Менша основа і більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнюють a см. Якими мають бути довжини інших сторін даної трапеції, щоби її площа була найбільшою?

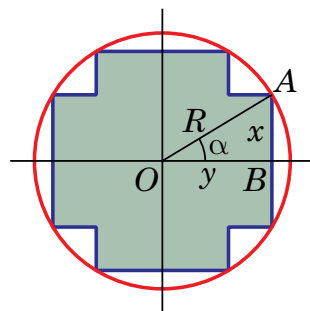
10. Серед усіх рівнобедрених трикутників із даним периметром P знайдіть такий трикутник, площа якого найбільша.

11. У рівнобедрений трикутник вписане коло з радіусом r . Яким має бути кут при основі трикутника, щоб площа трикутника була найбільшою?

12. Знайдіть сторони прямокутника, площа якого становить S , який має найменший периметр.

Рівень С

1. Знайдіть множину значень функції $y = 2x^3 - 3x^2$, заданої на відрізку $[-1; 1]$.
2. Відомо, що найменше значення функції $y = 3x^2 - x^3$ на проміжку $[-1; a]$ дорівнює 0. При якому найбільшому значенні a виконується дана умова?
3. На стіні висить картина. Її нижній край розташований на a м, а верхній — на b метрів вище за рівень очей спостерігача. На якій відстані від стіни повинен стояти спостерігач для того, щоб бачити картину під найбільшим кутом?
4. За даним рисунком, розв'яжіть задачу. При конструюванні трансформатора змінного струму необхідно заповнити порожнину котушки залізним хрестоподібним осердям з найбільшою площею відповідного перерізу. Якими мають бути розміри x, y перерізу осердя, якщо радіус котушки дорівнює R ?



5. Знайдіть найбільше (найменше) значення функції на інтервалі, якщо воно існує:

а) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$;

б) $f(x) = \frac{(x^2 + 2)^2}{x^2 - 1}$, $x \in (-1; 1)$.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося







