

Урок 10. Найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Постановка й практична важливість задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку.
2. Графічна ілюстрація поставленої задачі.
3. Поняття локальних точок екстремума.
4. Схема знаходження найбільшого або найменшого значень функції на відрізку.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 4) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 5) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

6) Основною частиною уроку є ознайомлення учнів з наслідками класичних теорем про застосування похідної, алгоритмом дослідження функції на монотонність.

7) Схема знаходження найбільшого й найменшого значень функції та її обґрунтування є найважливішим етапом уроку, оскільки саме на ньому учні/учениці отримують практичний інструмент для знаходження найбільшого (найменшого) значень неперервної функції на відрізку. Отже, доцільно попередні етапи уроку проводити у більш швидкому темпі, а зосередити увагу саме на схемі дослідження функції на відрізку, її обґрунтуванню та застосуванню в прикладних задачах.

8) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Як знайти найбільше та найменше значення диференційовної функції? Чи завжди вони існують?

2) Який зв'язок між диференційовністю функції та її неперервністю?

3) Яка теорема гарантує наявність у неперервної функції найбільшого та найменшого значень на відрізку?

4) Чи обов'язково найменше та найбільше значення функції досягаються у точках її локального екстремуму?

5) Чи можливо знайти найбільше і найменше значення неперервної функції на відрізку з використанням критичних точок?

Як я вирішую певну проблему із ЗНО/НМТ 2026 року?

Задача. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 30, & x < -2, \\ 2x^4 + x, & x \geq -2 \end{cases}$. Обчисліть значення виразу $f(-3) - f'(2)$.

II. Постановка й практична важливість задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку

Більшу частину своїх зусиль люди витрачають на пошук найкращого, тобто оптимального, рішення поставленої задачі. Як за рахунок обмежених ресурсів отримати найкращий рівень життя, найвищої продуктивності праці, найменших витрат, найбільшого прибутку, мінімального витраченого часу тощо.

У фізиці часто виникає потреба знайти максимальне або мінімальне значення певної величини. Наприклад, при вивченні руху тіла за заданим законом координата або швидкість описуються функцією часу. Максимальна висота, якої досягає тіло, кинуте вертикально вгору, — це найбільше значення функції висоти на певному проміжку часу.

В інженерії подібні задачі виникають при проектуванні конструкцій. Наприклад: мінімальна товщина балки, яка витримує навантаження; максимальна допустима напруга в матеріалі; оптимальна форма деталі для зменшення витрат матеріалу.

У фінансах аналізують: мінімальний ризик при інвестуванні; максимальний дохід за умови заданого бюджету.

У біології та медицині часто досліджують процеси росту та зміни характеристик організмів: максимальна концентрація ліків у крові; мінімальна ефективна доза препарату; оптимальний час дії медикаменту. Наприклад, концентрація ліків у крові змінюється з часом за певним законом. Щоб лікування було безпечним і ефективним, необхідно знати максимальне значення цієї концентрації на заданому проміжку часу.

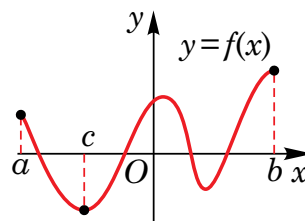
У програмуванні й комп'ютерних науках задачі оптимізації виникають постійно. Наприклад: мінімальний час виконання алгоритму; мінімальне споживання пам'яті; максимальна пропускна здатність мережі.

Не всі такі задачі можна розв'язати суто математичними методами, не до всіх можна застосувати похідну функції з однією змінною.

Однак частина таких проблем зводиться до відшукування найбільшого або найменшого значень функції на відрізку. Для неперервних на цьому відрізку функцій наявність найбільшого та найменшого значень гарантує друга теорема Вейерштрасса. А ось для знаходження таких значень доцільно застосувати похідну та критичні точки.

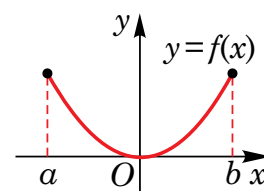
III. Графічна ілюстрація поставленої задачі

Нехай на даному відрізку $[a; b]$ розглядається неперервна функція $y = f(x)$. За другою теоремою Вейерштрасса, на цьому відрізку існують точки, в яких ця функція набуває, відповідно, найбільшого та найменшого значень. Кількість таких точок може бути різною. Їх розташування — також (див. рисунок).



Для функції, графік якої подано на рисунку, найбільше значення досягається тільки на кінці відрізка (при $x = b$), а найменше — у внутрішній точці c даного відрізка.

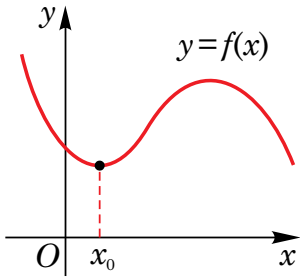
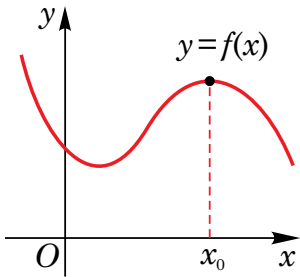
Неважко уявити собі й інші ситуації. Наприклад, коли найбільше значення досягається одночасно в двох точках, а найменше — в одній точці (див. рисунок).



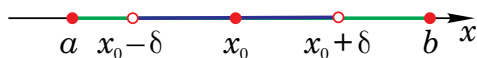
Таким чином, задача знаходження найбільшого (найменшого) значення неперервної функції на відрізку зводиться до знаходження найвищих (найнижчих) точок графіка функції на даному відрізку. При цьому таких точок може бути декілька зокрема їхніми абсцисами можуть бути кінці відрізка.

IV. Поняття локальних точок екстремуму

Пригадаємо поняття точок локального екстремуму — мінімуму та максимуму.

Вид точки локального екстремуму	Означення та графічна ілюстрація	Примітка
Точка локального мінімуму.	 x_0 — точка мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.	Точка мінімуму: $x_{\min} = x_0$. Мінімум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\min} = f(x_0)$.
Точка локального максимуму.	 x_0 — точка максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.	Точка максимуму: $x_{\max} = x_0$. Максимум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\max} = f(x_0)$.

Зрозуміло, що у випадку, коли найменше (найбільше) значення функції на відрізку $[a; b]$ досягається у деякій внутрішній точці x_0 цього відрізка, то ця точка буде точкою локального екстремума. Дійсно, в такій ситуації знайдеться δ -окіл точки x_0 , який цілком міститься у відрізку $[a; b]$ і на ньому справджується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$), оскільки відповідна нерівність має місце на всьому відрізку $[a; b]$ (див. рисунок).



Таким чином, найменше (найбільше) значення неперервної функції на відрізку може досягатися в точках локального екстремума або в одному чи обох кінцях цього відрізка.

V. Схема знаходження найбільшого або найменшого значень функції на відрізку.

Оскільки неперервна на відрізку функція, за теоремою Вейерштрасса, досягає свого найбільшого (найменшого) значення в деяких точках цього відрізка, то задача полягає у знаходженні цих точок. Якщо це внутрішні точки відрізка, то вони є точками локального екстремуму, а тому й критичними точками. Якщо ж ні, — то залишаються лише кінці відрізка, а значення функції у них можна порахувати окремо. Звідси випливає наступна схема знаходження найбільшого (найменшого) значення неперервної на відрізку функції, що має на ньому скінченну кількість критичних точок.

Схема знаходження найбільшого (найменшого) значень неперервної функції на відрізку	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x + 1}, x \in [0; 3]$
1. Знайдіть критичні точки даної функції, які належать даному відрізку.	$f'(x) = \frac{2x \cdot (x + 1) - 1 \cdot (x^2 + 8)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0,$ $\begin{cases} x = -4, \\ x = 2, \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$ $x \in [0; 3];$
2. Знайдіть значення функції у всіх знайдених критичних точках та окремо на кінцях відрізка.	$f(0) = \frac{0^2 + 8}{0 + 1} = 8,$ $f(2) = \frac{2^2 + 8}{2 + 1} = 4, \quad f(3) = \frac{3^2 + 8}{3 + 1} = 4 \frac{1}{4}.$
3. Порівняйте знайдені значення функції та оберіть із них найбільше (найменше). Ці значення й будуть найбільшим (найменшим) значеннями функції на відрізку.	$\max_{[0;3]} f(x) = f(0) = 8,$ $\min_{[0;3]} f(x) = f(2) = 4.$

Ілюстративні приклади

1. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = \sqrt{2} \sin x - x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. Дана функція є диференційовною на множині дійсних чисел, а тому неперервною на цій множині. Зокрема, вона неперервна в кожній точці відрізка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ і, за теоремою Вейерштрасса, набуває в деяких точках цього відрізка своє найбільше (найменше) значення на ньому.

Знайдемо критичні точки даної функції за допомогою похідної:

$$y' = \sqrt{2} \cos x - 1 = 0, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

На заданому відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ міститься лише одна критична точка $x = \frac{\pi}{4}$.

Знайдемо значення функції у цій критичній точці та на кінцях відрізка.

$$y(0) = \sqrt{2} \sin 0 - 0 = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4},$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, $3,14 < \pi < 3,15$, то:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} > 1 - \frac{3,15}{4} > 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2} < 1,5 - \frac{3,14}{2} < 0.$$

Таким чином, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) < y(0) < y\left(\frac{\pi}{4}\right)$, тому найбільше значення функції $y = \sqrt{2} \sin x - x$

на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ досягається в точці $\frac{\pi}{4}$, а найменше — в точці $\frac{\pi}{2}$.

Відповідь. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$; $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$.

- 2.** Периметр прямокутника дорівнює 20 см. При яких довжинах сторін цей прямокутник матиме найбільшу площу?

Розв'язання. Нехай довжина даного прямокутника дорівнює x (см). Зрозуміло, що півпериметр прямокутника дорівнює 10 см, а тому ширина дорівнює $10 - x$ (см). Звідси площа прямокутника обчислюється за формулою $S(x) = x(10 - x)$, причому $x \in [0; 10]$. Застосуємо для отриманої функції схему знаходження найбільшого значення на відрізку.

Знайдемо спочатку критичні точки даної функції, що належать відрізку $[0; 10]$:

$$S(x) = x(10 - x) = 10x - x^2, \quad S'(x) = 10 - 2x = 0, \quad x = 5 \in [0; 10].$$

Знайдемо значення функції у цій критичній точці та на кінцях відрізка:

$$S(0) = 0 \cdot (10 - 0) = 0, \quad S(5) = 5 \cdot (10 - 5) = 25, \quad S(10) = 10 \cdot (10 - 10) = 0.$$

Найбільшим із отриманих значень є $S(5) = 25$, тобто найбільша площа серед усіх прямокутників із периметром 20 см буде у квадрата зі стороною 5 см.

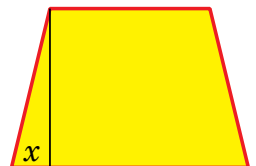
Відповідь. 5 см, 5 см.

- 3.** Бічні сторони та менша основа трапеції дорівнюють a см кожна. При якій довжині більшої основи площа трапеції буде найбільшою?

Розв'язання. Нехай гострий кут трапеції дорівнює x . Тоді висота трапеції дорівнює $a \cdot \sin x$ (см), а проекція бічної сторони на більшу основу дорівнює $a \cdot \cos x$ (см).

Отже, більша основа трапеції дорівнює $2a \cdot \cos x + a$, площа тра-

пеції $S(x) = \frac{2a \cdot \cos x + 2a}{2} \cdot a \cdot \sin x$, причому $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



Застосуємо для отриманої функції схему знаходження найбільшого значення на відрізку.

Якщо $S(x) = a^2 \cdot \sin x \cdot (\cos x + 1)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$S'(x) = a^2 \cdot (\cos x \cdot (\cos x + 1) + \sin x \cdot (-\sin x)),$$

$$S'(x) = a^2 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x) = a^2 \cdot (\cos 2x + \cos x) = 0.$$

Знайдемо критичні точки: $2a^2 \cdot \cos 1,5x \cdot \cos 0,5x = 0$,
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k, \\ x = \pi + 2\pi k. \end{cases}$$

З урахуванням, що $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, маємо єдину критичну точку $x = \frac{\pi}{3}$.

Знайдемо значення функції у цій критичній точці та на кінцях відрізка.

$$S(0) = a^2 \cdot \sin 0 \cdot (\cos 0 + 1) = 0, \quad S\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2,$$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + 1\right) = a^2.$$

Найбільшим з отриманих значень є $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$, тобто найбільша площа серед

усіх трапецій заданого виду буде у трапеції з гострим кутом $\frac{\pi}{3}$. Її більша основа

$$\text{дорівнює } 2a \cdot \cos \frac{\pi}{3} + a = 2a.$$

Відповідь. $2a$.

Висновок. За допомогою похідної можна дослідити найбільше та найменше значення неперервної на відрізку функції. Такі задачі дуже часто трапляються при математичному моделюванні. Тому важливим застосуванням дослідження функції за допомогою похідної є розв'язування саме таких завдань. Задача на знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку формує вміння мислити оптимізаційно, бачити обмеження реальних процесів і знаходити найкращі можливі рішення. Саме тому ці задачі мають важливе прикладне значення і є необхідною складовою математичної освіти.

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему із ЗНО/НМТ 2026 року?

Задача. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 30, & x < -2, \\ 2x^4 + x, & x \geq -2 \end{cases}$. Обчисліть значення виразу $f(-3) - f'(2)$.

Розв'язання. Оскільки $-3 < -2$, то $f(-3) = 30$.

Але $2 > -2$, тому $f'(x) = 8x^3 + 1, x > -2$.

$$f'(2) = 8 \cdot 2^3 + 1 = 65.$$

Таким чином, $f(-3) - f'(2) = 30 - 65 = -35$.

Відповідь. -35 .

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

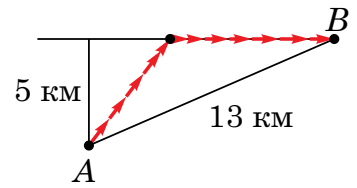
- Знайдіть найбільше та найменше значення функції на відрізку:
а) $y = x - \frac{1}{3}x^3, [-2; 0]$; б) $y = \frac{x}{x^2 + 1}, [0; 2]$; в) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}, x \in [-3; 0]$.
- Подайте число 12 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб їх добуток був найбільшим.
- Подайте число 10 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.
- Тіло, кинуте вертикально вгору, рухається за законом $h(t) = 8t - t^2$, де h — висота (у метрах), t — час (у секундах). Визначте, в який момент часу тіло досягне найбільшої висоти та яким буде її значення в цей момент.
- Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 18t^2 - t^3$, де x — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Визначте, в який момент часу із проміжку $[4; 8]$ швидкість точки буде найбільшою, та знайдіть значення швидкості в цей момент.
- Парканом задовжки 400 м треба відгородити на березі річки прямокутне пасовисько найбільшої площі. Якими мають бути його розміри?



Рівень В

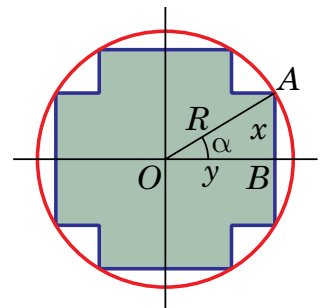
- Знайдіть найбільше та найменше значення функції на відрізку:
а) $y = (x + 1)^2(x - 1), [-2; 0]$; б) $y = x + \cos^2 x, \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;
в) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}, x \in [-3; 0]$.
- Знайдіть найбільше та найменше значення функції на відрізку та точки, в яких ці значення досягаються:
а) $y = (x + 1)^2(x - 3)^2, [-2; 2]$; б) $y = 2\cos^2 x + \cos 2x, \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$;
в) $y = 2\sin 2x + \cos 4x, \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.
- Знайдіть довжини сторін прямокутника найбільшої площі, вписаного в коло даного радіуса R .
- В системі координат через точку $A(2; 4)$ проведено пряму, яка перетинає осі координат в додатних точках. Якими мають бути сторони отриманого прямокутного трикутника, щоб його площа була мінімальною?
- Подайте число 20 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток одного з них на куб другого був найбільшим.
- Число 8 поділіть на два недодатних доданки таким чином, щоб сума їхніх кубів була найбільшою.

7. Знайдіть сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного у півкруг з радіусом R таким чином, щоб дві сусідні вершини лежали на діаметрі, а дві інші — на півколі, що обмежує даний півкруг.
8. Із пункту A (див. рисунок), що знаходиться в лісі на відстані 5 км від прямолінійного шосе, пішоходу треба потрапити у пункт B , що знаходиться на цьому ж шосе на відстані 13 км від пункту A . Уздовж шосе пішохід рухається зі швидкістю 5 км/год, а по лісу — зі швидкістю 3 км/год. За який мінімальний час пішохід зможе потрапити з пункту A у пункт B ?
9. Менша основа і більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнюють a см. Якими мають бути довжини інших сторін даної трапеції, щоби її площа була найбільшою?
10. Серед усіх рівнобедрених трикутників із даним периметром P знайдіть такий трикутник, площа якого найбільша.
11. У рівнобедрений трикутник вписане коло з радіусом r . Яким має бути кут при основі трикутника, щоб площа трикутника була найбільшою?
12. Знайдіть сторони прямокутника, площа якого становить S , який має найменший периметр.



Рівень С

1. Знайдіть множину значень функції $y = 2x^3 - 3x^2$, заданої на відрізку $[-1; 1]$.
2. Відомо, що найменше значення функції $y = 3x^2 - x^3$ на проміжку $[-1; a]$ дорівнює 0. При якому найбільшому значенні a виконується дана умова?
3. На стіні висить картина. Її нижній край розташований на a м, а верхній — на b метрів вище за рівень очей спостерігача. На якій відстані від стіни повинен стояти спостерігач для того, щоб бачити картину під найбільшим кутом?
4. За даним рисунком, розв'яжіть задачу. При конструюванні трансформатора змінного струму необхідно заповнити порожнину котушки залізним хрестоподібним осердям з найбільшою площею відповідного перерізу. Якими мають бути розміри x, y перерізу осердя, якщо радіус котушки дорівнює R ?



5. Знайдіть найбільше (найменше) значення функції на інтервалі, якщо воно існує:

а) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in (0; +\infty)$;

б) $f(x) = \frac{(x^2 + 2)^2}{x^2 - 1}, x \in (-1; 1)$.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
-
-

- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.
.
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.
.
- 4) Найскладнішим для мене було
.
.
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.
.
- 6) Найбільше мені сподобалося
.
.