

11

Тема 3.

Застосування похідної

Урок 11. Урок–практикум. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції на заданому відрізку

Тип уроку: формування умінь і навичок.

План уроку

1. Знаходження локальних точок екстремуму. Робота в парах.
2. Знаходження найбільших або найменших значень функції на заданих відрізках. Робота в малих групах.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює їхнє застосування, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П];

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

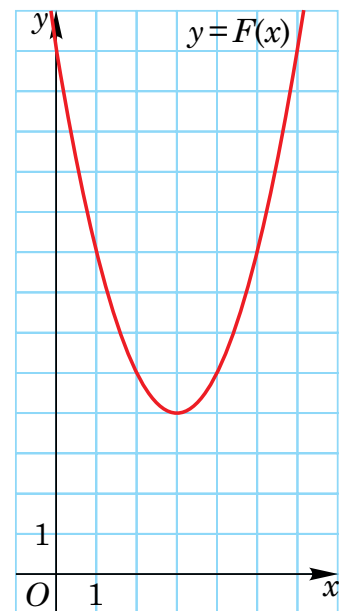
- 1) На початку уроку запропонуйте учням завдання для повторення. Завдання учні/учениці виконують усно.
- 2) Сформулюйте задачу ЗНО/НМТ. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Об'єднайте учнів/учениць у пари та запропонуйте їм розв'язувати відповідні завдання. Учитель виступає у ролі консультанта та порадирика.
- 4) Об'єднайте учнівство у кілька груп. Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички.
- 5) Наприкінці уроку пропонуйте учням/ученицям розв'язати задачу ЗНО, сформульовану на початку уроку. Об'єднайте учнівство у кілька груп.

- 6) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язати завдання, запропоновані на різних етапах уроку.
- 7) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 8) Основна мета уроку — формування умінь та навичок для знаходження найбільшого й найменшого значень функцій за допомогою похідної.
- 9) Додаткова мета уроку — знаходження точок локального екстремуму функції.
- 10) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

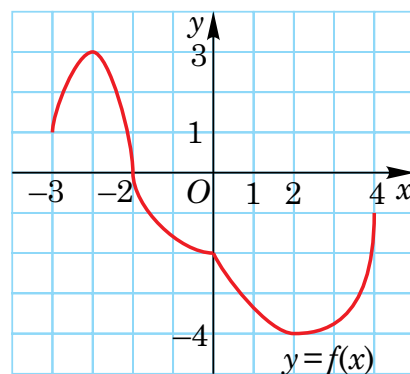
Як я вирішую певну проблему ЗНО 2013 року?

Задача. На рисунку зображено графік функції $F(x) = x^2 + bx + c$, похідна від якої дорівнює функції $f(x)$ для будь-якого дійсного значення x . Визначте параметри b і c та знайдіть функцію $f(x)$. У відповідь запишіть $f(-8)$.



II. Повторення (2–3 хв)

1. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Установіть відповідність між величиною (1–4) та її значенням (А–Д).



Величина

- 1 точка максимуму функції
- 2 точка мінімуму функції
- 3 абсциса точки перетину графіка з віссю абсцис
- 4 абсциса точки перетину графіка з віссю ординат

Значення
величини

- А -3
Б -2
В -1
Г 0
Д 2

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

III. Знаходження локальних точок екстремуму. Робота в парах

Нагадаємо алгоритм дослідження функцій на монотонність та точки екстремуму.

1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.
2. Знайдіть похідну даної функції.
3. Знайдіть критичні точки даної функції, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ або точки, в яких похідна не існує.
4. Нанесіть критичні точки на $D(f)$ і визначте знаки похідної на кожному з утворених інтервалів.
5. Визначте проміжки монотонності даної функції. Якщо похідна додатна, то функція зростає. Якщо похідна від'ємна, то функція спадає.
6. Користуючись ознаками точок максимуму та мінімуму функції, визначте точки локального екстремуму. За необхідності знайдіть значення функції у цих точках (локальні екстремуми).

Завдання для роботи в парах.

2. Знайдіть точки локального мінімуму функції $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2 - 1)$.
3. Знайдіть точки локального максимуму функції $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$.
4. Знайдіть точки локального екстремуму та локальні екстремуми функції $f(x) = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x - 3$. Визначте вид локальних екстремумів.

IV. Знаходження найбільших або найменших значень функції на заданих відрізках. Робота в малих групах

<i>Схема знаходження найбільшого (найменшого) значень неперервної функції на відрізку</i>	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x + 1}, x \in [0; 3]$
1. Знайдіть критичні точки даної функції, які належать даному відрізку.	$f'(x) = \frac{2x \cdot (x + 1) - 1 \cdot (x^2 + 8)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0,$ $\begin{cases} x = -4, \\ x = 2, \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$ $x \in [0; 3];$
2. Знайдіть значення функції у всіх знайдених критичних точках та окремо на кінцях відрізка.	$f(0) = \frac{0^2 + 8}{0 + 1} = 8,$ $f(2) = \frac{2^2 + 8}{2 + 1} = 4, \quad f(3) = \frac{3^2 + 8}{3 + 1} = 4\frac{1}{4}.$
3. Порівняйте знайдені значення функції та оберіть із них найбільше (найменше). Ці значення й будуть найбільшим (найменшим) значеннями функції на відрізку.	$\max_{[0;3]} f(x) = f(0) = 8,$ $\min_{[0;3]} f(x) = f(2) = 4.$

Завдання для роботи в малих групах.

- Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}}$ на відрізку $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$.
- Знайдіть найменше значення функції $f(x) = 9 \sin x - \sin 3x + 1$ на відрізку $[0; \pi]$.
- Знайдіть найбільше та найменше значення даної функції $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}$ на відрізку $[-1; 3]$.

V. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему ЗНО 2013 року?

Задача. На рисунку зображено графік функції $F(x) = x^2 + bx + c$, похідна від якої дорівнює функції $f(x)$ для будь-якого дійсного значення x . Визначте параметри b і c та знайдіть функцію $f(x)$. У відповідь запишіть $f(-8)$.

Розв'язання. Оскільки дана функція $F(x) = x^2 + bx + c$ набуває найменшого значення у внутрішній точці області визначення (при $x_0 = 3$), то ця точка є точкою локального мінімуму.

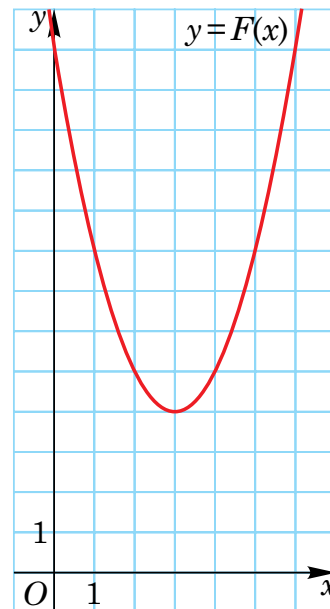
За теоремою Ферма, $F'(x) = 2x + b = 0$ при $x_0 = 3$, тобто $b = -6$.

З іншого боку, $F(3) = 4$, отже $F(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + c = 4$, $c = 13$.

Для функції $f(x) = F'(x) = 2x + b$ знайдемо $f(-8)$:

$$f(-8) = 2 \cdot (-8) - 6 = -22.$$

Відповідь. -22 .



Висновок. Неперервна на відрізку функція завжди набуває на ньому найбільшого та найменшого значення. Кожне з цих значень досягається або в критичній точці, або на кінцях заданого відрізка.

VI. Додаткові завдання

1. Знайдіть критичні точки функції:

1) $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}$;

2) $y = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

3) $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$.

2. Знайдіть точки локального екстремуму функції:

1) $y = \frac{x^4 - 8}{(x+1)^4}$;

2) $y = \frac{6}{x\sqrt{4-x^2}}$;

3) $y = \cos x \cos 2x$.

3. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на відрізку:

1) $y = x^2(2x-3) - 12(3x-2)$, $[-3; 6]$;

2) $y = 4 \sin 2x - 2 \sin 4x$, $[0; \pi]$;

3) $y = |x^3 - 3x^2 + 5|$, $[0; 3]$.

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

.....
.....
.....

(–) що залишилося незрозумілим:

.....
.....
.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....
.....
.....