

Урок 12. Застосування найбільшого та найменшого значень функції для розв'язування й дослідження рівнянь і нерівностей

Тип уроку: урок формування вмінь та навичок.

План уроку

1. Розв'язування рівнянь за допомогою знаходження найбільшого (найменшого) значень функції на області допустимих значень рівняння. Робота в парах.
2. Дослідження функцій, що відповідають нерівностям. Доведення нерівностей на заданих проміжках. Робота в малих групах.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням завдання для повторення. Завдання учні/учениці виконують усно.
- 2) Сформулюйте задачу ЗНО/НМТ. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Об'єднайте учнів/учениць у пари та запропонуйте їм розв'язувати відповідні завдання. Учитель виступає у ролі консультанта та радника.
- 4) Об'єднайте учнівство у кілька груп. Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички.
- 5) Наприкінці уроку пропонуйте учням/ученицям розв'язати задачу ЗНО, сформульовану на початку уроку. Об'єднайте учнівство у кілька груп.

- 6) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язати завдання, запропоновані на різних етапах уроку.
- 7) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 8) Основна мета уроку — формування умінь та навичок для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей за допомогою дослідження функції на відрізку.
- 9) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

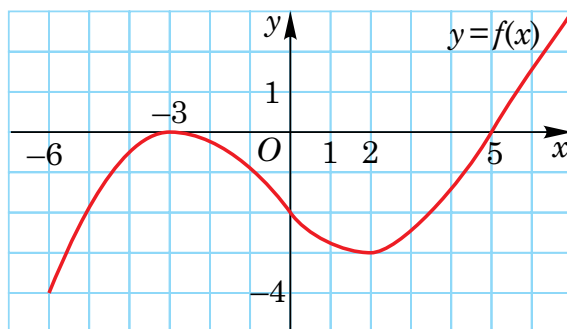
Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2012 року?

Задача. Функція $f(x)$ в точці $x_0 = 5$ має похідну $f'(5) = -1$. Обчисліть значення похідної функції $g(x) = f(x) \cdot x$ в точці x_0 , якщо $f(5) = 3$.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

II. Повторення (3–4 хв)

1. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-6; 7]$. Установіть відповідність між початком речення (1–4) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

- 1 Сума чисел, що відповідають критичним точкам функції $y = f(x)$, дорівнює
- 2 Найбільше значення функції на проміжку $[-6; 2]$ дорівнює
- 3 Сума чисел, що відповідають екстремумам функції $y = f(x)$, дорівнює
- 4 Сума цілих чисел x із проміжку $[-6; 7]$, для яких $f'(x) \leq 0$, дорівнює

Закінчення речення

- А -4 .
 Б -3 .
 В -2 .
 Г -1 .
 Д 0 .

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

II. Розв'язування рівнянь за допомогою знаходження найбільшого (найменшого) значень функції на області допустимих значень рівняння. Робота в парах.

Повторимо схему знаходження найбільшого й найменшого значень функції на заданому відрізку (див. таблицю).

<i>Схема знаходження найбільшого (найменшого) значень неперервної функції на відрізку</i>	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x + 1}, x \in [0; 3]$
1. Знайдіть критичні точки даної функції, які належать даному відрізку.	$f'(x) = \frac{2x \cdot (x + 1) - 1 \cdot (x^2 + 8)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0,$ $\begin{cases} x = -4, \\ x = 2, \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$ $x \in [0; 3];$
2. Знайдіть значення функції у всіх знайдених критичних точках та окремо на кінцях відрізка.	$f(0) = \frac{0^2 + 8}{0 + 1} = 8,$ $f(2) = \frac{2^2 + 8}{2 + 1} = 4, \quad f(3) = \frac{3^2 + 8}{3 + 1} = 4\frac{1}{4}.$
3. Порівняйте знайдені значення функції та оберіть із них найбільше (найменше). Ці значення й будуть найбільшим (найменшим) значеннями функції на відрізку.	$\max_{[0;3]} f(x) = f(0) = 8,$ $\min_{[0;3]} f(x) = f(2) = 4.$

Задачі для роботи в парах

- Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = \sqrt[4]{x-3} + \sqrt[4]{5-x}$ на відрізку $[3; 5]$.
- Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-3} + \sqrt[4]{5-x} = 2$.
- Знайдіть, при яких значеннях параметру a рівняння $\sqrt[4]{x-3} + \sqrt[4]{5-x} = a$ має точно два дійсні корені.

III. Дослідження функцій, що відповідають нерівностям. Доведення нерівностей на заданих проміжках. Робота в малих групах

Завдання для роботи в малих групах.

- Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2$ на відрізку $[-1; 4]$.

6. Доведіть, що для всіх значень змінної x із відрізка $[-1; 4]$ виконується нерівність $-4 \leq x^3 - 3x^2 \leq 16$.
7. Знайдіть, при яких значеннях параметру a нерівність $x^3 - 3x^2 - ax \geq 0$ справджується на відрізку $[-1; 4]$.

IV. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2012 року?

Задача. Функція $f(x)$ в точці $x_0 = 5$ має похідну $f'(5) = -1$. Обчисліть значення похідної функції $g(x) = f(x) \cdot x$ в точці x_0 , якщо $f(5) = 3$.

Розв'язання. Застосуємо до функції $g(x) = f(x) \cdot x$ формулу для обчислення похідної добутку: $g'(x) = f'(x) \cdot x + f(x) \cdot x' = f'(x) \cdot x + f(x) \cdot 1$; $g'(x) = f'(x) \cdot x + f(x)$.

Звідси $g'(x_0) = g'(5) = f'(5) \cdot 5 + f(5) = -1 \cdot 5 + 3 = -2$.

Відповідь. -2 .

V. Додаткові завдання для самостійного розв'язання

1. Розв'яжіть рівняння:
 - а) $\sqrt[6]{x-2} + \sqrt[6]{6-x} = 2\sqrt[6]{2}$;
 - б) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$;
 - в) $\sqrt[4]{x+11} + \sqrt[4]{21-x} = x^2 - 10x + 29$.
2. Доведіть, що на даному проміжку справджуються нерівності:
 - а) $0 \leq x^3 - 2x^2 + x \leq 2, [0; 2]$;
 - б) $6 \leq \frac{x^2 + 15}{x + 1} \leq 15, [0; 4]$;
 - в) $0 \leq x - \sin^2 x \leq \pi, [0; \pi]$.
3. Розв'яжіть завдання з параметром:
 - а) знайдіть найбільше значення функції на відрізку в залежності від значень параметру a : $y = x^4 - 2ax^2 + 3a^2, [-2; 1]$.
 - б) доведіть, що при будь-яких значеннях параметру a із проміжку $[-1, 5; 0]$ справджується нерівність $x^3 + 1,5ax^2 \leq 0$ для всіх x із відрізка $[-a^2; a^2]$;
 - в) функція $y = \frac{1}{x^2 - 4x + a}$ визначена на відрізку $[5; 7]$ і її значення на ньому не перевищують числа $0,1$. Знайдіть усі відповідні значення параметру a .

VI. Рефлексія (1–2 хв)

1. Я знаю схему знаходження найбільшого (найменшого) значень функції на відрізку за допомогою похідної.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- 2.** Я вмію знаходити найбільше (найменше) значення функції на відрізку за допомогою похідної.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 3.** Я розумію, що найбільше (найменше) значення неперервної на відрізку функції може досягатися або в точках локального екстремума, або на кінцях відрізка.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 4.** Я вмію застосовувати дослідження функції на відрізку для розв'язування рівнянь.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 5.** Я вмію застосовувати дослідження функції на відрізку для доведення нерівностей.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 6.** Я розумію ідею застосування дослідження функції на деякій множині аргументів для розв'язування рівнянь та нерівностей.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|