

Урок 13. Урок–практикум. Розв’язування оптимізаційних задач геометричного змісту

Тип уроку: формування умінь і навичок.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в малих групах. Побудова математичних моделей задач геометричного змісту.
3. Робота в парах. Розв’язування оптимізаційних задач геометричного змісту.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

обирає математичну модель розв’язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує різні форми подання математичних об’єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

впорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте задачу ЗНО/НМТ. Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи.
- 2) На початку уроку запропонуйте учням письмову перевірку відповідей до деяких завдань домашнього завдання. За необхідності зробіть аналіз якихось із запропонованих завдань.
- 3) Обговоріть найважливіші задачі домашнього завдання. При необхідності використайте опитування біля дошки або інші форми роботи.
- 4) Учні/учениці об’єднуються в пари і працюють над завданнями для роботи в групах.
- 5) Об’єднуємо учнівство у кілька груп. Упродовж розв’язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички. Розв’язуємо завдання для групової роботи.
- 6) Наприкінці уроку пропонуйте учням/ученицям розв’язати практичну задачу, сформульовану на початку уроку. Об’єднайте клас у кілька груп.

- 7) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язати завдання, запропоновані на різних етапах уроку.
- 8) Основна мета уроку — формування умінь та навичок учнів/учениць для розв'язування оптимізаційних задач геометричного змісту за допомогою похідної.
- 9) Додаткова мета уроку — повторення властивостей похідної та теорем про її застосування.
- 10) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2008 року?

Задача. Задано функцію $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції, екстремуми функції. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$. Знайдіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, залежно від значення параметра a .

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

- Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = x - \frac{1}{3}x^3$ на відрізку $[-2; 0]$.
Відповідь. $\max_{[-2;0]} y(x) = y(-2) = \frac{2}{3}$; $\min_{[-2;0]} y(x) = y(-1) = -\frac{2}{3}$.
- Подайте число 10 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоби сума їх квадратів була найменшою.
Відповідь. $10 = 5 + 5$.
- Знайдіть критичні точки функції: $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$.
Відповідь. $-1; 3$.
- Розв'яжіть рівняння: $\sqrt[6]{x-2} + \sqrt[6]{6-x} = 2\sqrt[6]{2}$.
Відповідь. 4.
- За допомогою паркану довжиною 400 м треба відгородити на березі річки прямокутне пасовисько найбільшої площі. Якими мають бути його розміри?
Відповідь. $200 \text{ м} \times 100 \text{ м}$.



Завдання для обговорення.

- Розв'яжіть рівняння: $\sqrt[4]{x+11} + \sqrt[4]{21-x} = x^2 - 10x + 29$.
Вказівка. Найбільше значення лівої частини рівняння на $[-11; 21]$ досягається при $x = 5$, а найменше значення правої частини рівняння досягається при тому самому значенні змінної.
Відповідь. 5.

7. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = |x^3 - 3x^2 + 5|$ на відрізку $[0; 3]$.

Вказівка. Найменше значення функції $y = x^3 - 3x^2 + 5$ на даному відрізку є додатним, тому $y = |x^3 - 3x^2 + 5| = x^3 - 3x^2 + 5$ при $x \in [0; 3]$.

Відповідь. $\max_{[0;3]} y(x) = y(0) = y(3) = 5$; $\min_{[0;3]} y(x) = y(2) = 1$.

8. На стіні висить картина. Її нижній край розташований на a м, а верхній — на b метрів вище за рівень очей спостерігача. На якій відстані від стіни повинен стояти спостерігач для того, щоб бачити картину під найбільшим кутом?

Вказівка. Якщо у якості змінної взяти відстань від спостерігача до стіни, то ця змінна може набувати значень від 0 до нескінченності, тому застосування стандартної схеми знаходження найбільшого значення функції на відрізку буде некоректним. Доцільно довести, що єдина критична точка на розглядуваному проміжку відповідає найбільшому значенню потрібного кута.

Відповідь. $\sqrt{ab}$.

III. Робота в малих групах. Побудова математичних моделей задач геометричного змісту

Завдання для роботи в малих групах

Заповніть схему розв'язання геометричних задач на знаходження найбільшого/найменшого значень величини за допомогою похідної.

Схема розв'язання геометричних задач на найбільше/найменше значення величини за допомогою похідної	
Етапи побудови та розв'язання математичної моделі	Приклад. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Якою має бути довжина основи трикутника, щоб його площа набувала найбільшого можливого значення?
1. Зробіть рисунок відповідно до умови задачі, позначте на ньому відомі величини.	
2. Позначте одну з невідомих величин змінною, зазвичай, це довжина відрізка або кут.	

**Схема розв'язання геометричних задач
на найбільше/найменше значення величини за допомогою похідної**

Етапи побудови та розв'язання математичної моделі	Приклад. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Якою має бути довжина основи трикутника, щоб його площа набувала найбільшого можливого значення?
3. Визначте, які є обмеження на обрану змінну: • змінна належить певному відрізку; • змінна належить множині, що не є відрізком або його частиною.	
4. Використовуючи геометричні міркування, знайдіть формулу, яка описує потрібну величину.	
5. Знайдіть за допомогою похідної найбільше/ найменше значення відповідної функції, з урахуванням обмеження на змінну.	
6. Запишіть відповідь до заданої геометричної задачі у відповідних термінах.	Відповідь. 16 см.

IV. Робота в парах. Розв'язування оптимізаційних задач геометричного змісту

Задачі для роботи в парах

- 9.** У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює l , а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть найбільшу можливу площу трапеції.

Указівка. Позначте змінною гострий кут трапеції.

Відповідь. $\frac{3l^2\sqrt{3}}{16}$.

- 10.** У прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см та гострим кутом 60° вписали прямокутник, дві сусідні вершини якого лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах. Знайдіть сторони даного прямокутника за умови, що він має найбільшу можливу площу.

Вказівка. Позначте змінною сторону прямокутника, перпендикулярну до гіпотенузи даного прямокутного трикутника.

Відповідь. 4 см, $\sqrt{3}$ см.

- 11.** Довжина більшої основи рівнобічної трапеції дорівнює 13 см, а периметр становить 28 см. Знайдіть невідомі сторони трапеції за умови, що її площа дорівнює 27 см^2 . Чи може площа даної трапеції дорівнювати $27,001 \text{ см}^2$?

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок).

Нехай $AB = x$ (см). Тоді $BC = 28 - 13 - 2x = 15 - 2x$ (см),

$$AE = \frac{13 - (15 - 2x)}{2} = x - 1 \text{ (см)}.$$

За теоремою Піфагора, $BE = \sqrt{x^2 - (x - 1)^2} = \sqrt{2x - 1}$ (см).

Звідси площа трапеції дорівнює

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE = \frac{28 - 2x}{2} \cdot \sqrt{2x - 1} \text{ (см)}.$$

Знайдемо найбільше можливе значення функції $S(x) = (14 - x) \cdot \sqrt{2x - 1}$, якщо $x \in [1; 7,5]$.

$$S'(x) = -\sqrt{2x - 1} + \frac{14 - x}{\sqrt{2x - 1}} = \frac{-(2x - 1) + 14 - x}{\sqrt{2x - 1}} = \frac{-3x + 15}{\sqrt{2x - 1}}, \quad S'(x) = \frac{-3x + 15}{\sqrt{2x - 1}} = 0,$$

$x = 5$ — критична точка.

Знайдемо значення функції у цій критичній точці та на кінцях відрізка:

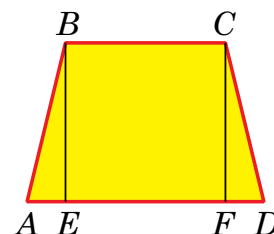
$$S(5) = (14 - 5) \cdot \sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 27, \quad S(1) = (14 - 1) \cdot \sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 13,$$

$$S(7,5) = (14 - 7,5) \cdot \sqrt{2 \cdot 7,5 - 1} = 6,5 \cdot \sqrt{14} < 6,5 \cdot 4 = 26 < 27.$$

Найбільшим з отриманих значень є $S(5) = 27$, тобто найбільша площа серед усіх трапецій заданого виду буде у трапеції з бічною стороною 5 см.

Її менша основа дорівнює $15 - 10 = 5$ (см).

Відповідь. 1) 5 см, 5 см, 5 см. 2) Ні.



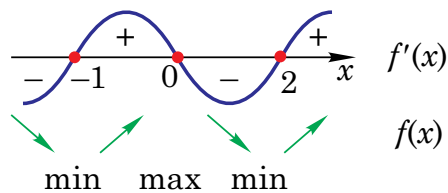
V. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2008 року?

- Задача.** Задано функцію $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції, екстремуми функції. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$. Знайдіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, залежно від значення параметра a .

Розв'язання. Знайдемо похідну даної функції, дослідимо її на монотонність на множині дійсних чисел.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x + 1)(x - 2).$$

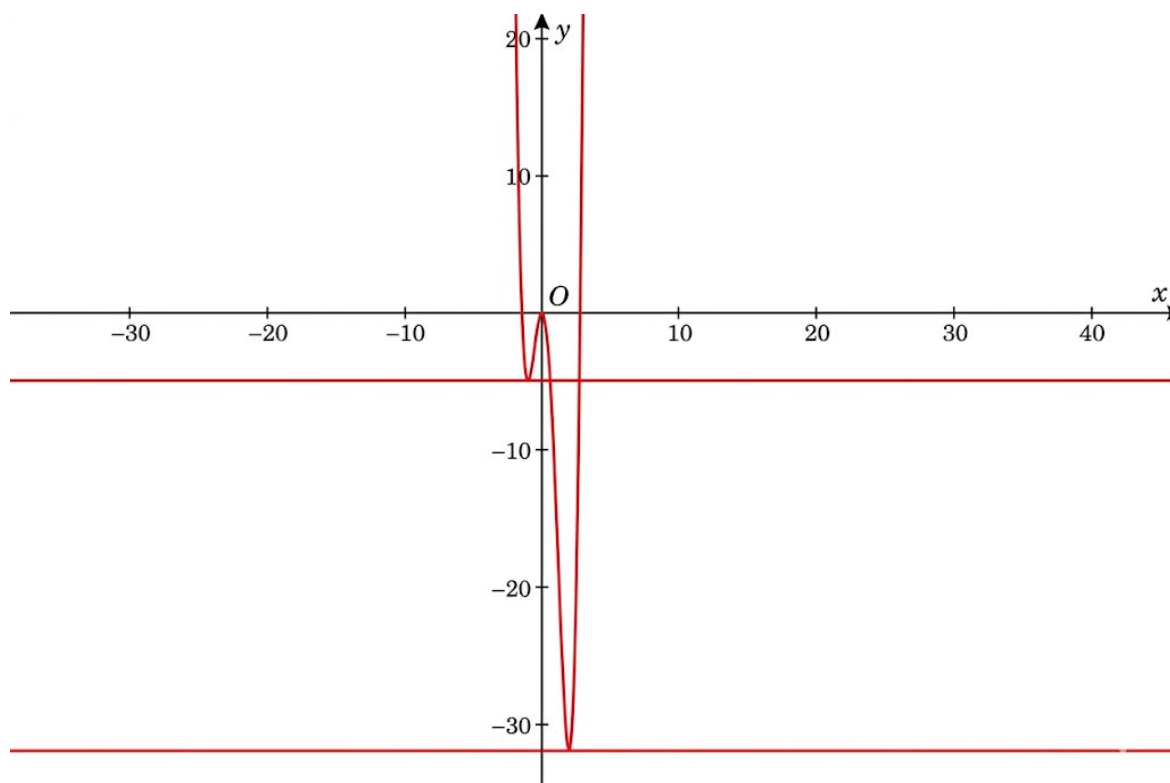


Відповідно, функція зростає на проміжках $[-1; 0]; [2; +\infty)$ та спадає на проміжках $(-\infty; -1]; [0; 2]$.

Знайдемо екстремуми функції:

$$f_{\min} = f(-1) = 3 + 4 - 12 = -5; \quad f_{\max} = f(0) = 0 - 0 - 0 = 0; \quad f_{\min} = f(2) = 48 - 32 - 48 = -32.$$

Із урахуванням наведеного дослідження, а також поведінки функції на нескінченності $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^4 - 4x^3 - 12x^2) = +\infty$, побудуємо ескіз графіка. Тоді кількість розв'язків рівняння $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ буде відповідати кількості точок перетину даного графіка із горизонтальною прямою $y = a$.



Відповідь. Якщо $a < -32$, то рівняння не має розв'язків. Якщо $a = -32$, то рівняння має один розв'язок. Якщо $a \in (-32; -5) \cup (0; +\infty)$, то рівняння має два розв'язки. Якщо $a \in \{-5; 0\}$, то рівняння має три розв'язки. Якщо $a \in (-5; 0)$, то рівняння має чотири розв'язки.

Висновок. Геометричні задачі на знаходження найбільшого або найменшого значення часто доцільно розв'язувати у межах математичної моделі про дослідження функції на певній множині аргументів зокрема на відрізку. У якості змінної варто обирати довжину відрізка або величину кута.

