

Урок 14. Урок–практикум. Розв’язування оптимізаційних задач прикладного змісту

Тип уроку: урок формування вмінь та навичок.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в малих групах. Побудова математичних моделей задач прикладного змісту.
3. Робота в парах. Розв’язування оптимізаційних задач прикладного змісту.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв’язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте задачу обласної олімпіади. Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 2) На початку уроку організуйте перевірку домашнього завдання. В рамках перевірки проаналізуйте розв’язання двох задач.
- 3) Об’єднайте учнів/учениць у пари та запропонуйте їм розв’язувати відповідні завдання. Учитель виступає у ролі консультанта та порадирика.
- 4) Об’єднайте учнівство у кілька груп. Упродовж розв’язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички.

5) Наприкінці уроку пропонуйте учням/ученицям розв'язати олімпіадну задачу, сформульовану на початку уроку. Об'єднайте учнівство у кілька груп. При розв'язанні задачі надавайте учнівству вказівки щодо розв'язування задачі.

6) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язати завдання, запропоновані на різних етапах уроку.

7) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

8) Основна мета уроку — формування умінь та навичок для розв'язування оптимізаційних задач прикладного змісту за допомогою похідної.

9) Додаткова мета уроку — повторення властивостей похідної та теорем про її застосування.

10) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.

I. Організаційна частина (2 хв)

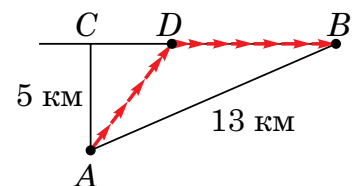
Як я вирішую певну проблему обласної олімпіади?

Задача. Чи існує функція $f(x)$, яка визначена на множині дійсних чисел, має похідну у всіх точках та задовольняє умови: 1) при всіх дійсних x виконується нерівність $f(x) \geq f(x + \sin x)$; 2) рівняння $f'(x) = 0$ має скінченну кількість коренів?

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Задачі для обговорення

1. Із пункту A , що знаходиться в лісі на відстані 5 км від прямолінійного шосе, пішоходу треба потрапити в пункт B , що знаходиться на цьому ж шосе на відстані 13 км від пункту A . Уздовж шосе пішохід рухається зі швидкістю 5 км/год, а по лісу — зі швидкістю 3 км/год. За який мінімальний час пішохід зможе потрапити з пункту A у пункт B ?



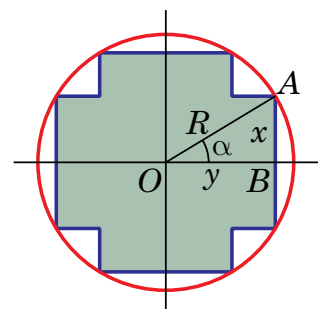
Вказівка. Нехай основа перпендикуляра, проведеного з точки A до шосе, — точка C , а пішохід вийшов на шосе у точці D , що належить відрізку BC .

Якщо $CD = x$ (км), то витрачений час дорівнює $t(x) = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{3} + \frac{12 - x}{5}$, причому

$x \in [0; 12]$. Тоді задача зводиться до відшукування найменшого значення функції на відрізку.

Відповідь. 3 год. 45 хв.

2. Користуючись даним рисунком, розв'яжіть задачу. При конструюванні трансформатора змінного струму необхідно заповнити порожнину котушки залізним хрестоподібним осердям з найбільшою площею відповідного перерізу. Якими мають бути розміри x та y перерізу осердя, якщо радіус котушки дорівнює R ?



Вказівка. Нехай $\angle AOB = \alpha$, тоді $x = R \sin \alpha$, $y = R \cos \alpha$. Тоді площа перерізу осердя буде дорівнювати $S = 2 \cdot (2x \cdot 2y) - (2x \cdot 2x) = 4R^2 \sin 2\alpha - 4R^2 \sin^2 \alpha$, причому $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тепер задача зводиться до відшукування найбільшого значення функції

на відрізку. Це значення досягається при $\alpha_0 = \frac{\arctg 2}{2}$, тобто $\alpha_0 \approx 31,7^\circ$.

Відповідь. $x = R \sin \alpha_0 \approx 0,53R$; $y = R \cos \alpha_0 \approx 0,85R$.

III. Робота в малих групах. Побудова математичних моделей задач прикладного змісту

Задачі для роботи в малих групах

Заповніть схему розв'язання задач прикладного змісту на знаходження найбільшого або найменшого значень величин за допомогою похідної. Скористайтесь ідеями, аналогічними до тих, що містяться у схемі розв'язування геометричних задач за допомогою похідної.

Схема розв'язання задач прикладного змісту на найбільше або найменше значення величини за допомогою похідної	
Етапи побудови та розв'язання математичної моделі	Задача. Завод A розміщено на відстані 50 км від прямолінійної ділянки залізниці, що проходить через місто B і на відстані 130 км від міста B . Під яким кутом до залізниці треба прокласти дорогу від заводу A , щоб доставка вантажів з A до B була найдешевшою, якщо вартість перевезення залізницею вдвічі менша, ніж дорогою на аналогічну відстань.
1. ...	
2. Позначте одну з невідомих величин змінною.	
3. Визначте, які є обмеження на обрану змінну: 3.1. ... 3.2. ...	

**Схема розв'язання задач прикладного змісту
на найбільше або найменше значення величини за допомогою похідної**

Етапи побудови та розв'язання математичної моделі	Задача. Завод A розміщено на відстані 50 км від прямолінійної ділянки залізниці, що проходить через місто B і на відстані 130 км від міста B . Під яким кутом до залізниці треба прокласти дорогу від заводу A , щоб доставка вантажів з A до B була найдешевшою, якщо вартість перевезення залізницею вдвічі менша, ніж дорогою на аналогічну відстань.
4. Знайдіть формулу, що описує потрібну величину, використовуючи ...	
5. Знайдіть за допомогою похідної найбільше/найменше значення відповідної функції, з урахуванням ...	
6. Запишіть відповідь до заданої задачі прикладного змісту у відповідних термінах.	<i>Відповідь.</i>

IV. Робота в парах. Розв'язування оптимізаційних задач прикладного змісту

Задачі для роботи в парах

- 3.** Пункти A , B , C знаходяться у вершинах прямокутного трикутника ABC з прямим кутом при вершині C , причому $AC = 285$ км, $BC = 60$ км. Пункти A та C сполучені прямолінійною ділянкою залізниці. У яку точку відрізка AC треба провести ґрунтову дорогу з пункту B , щоб час перебування у дорозі від A до B був найменшим, якщо відомо, що швидкість руху залізницею становить 52 км/год, а ґрунтовою дорогою — 20 км/год?

4. На двох будівельних майданчиках будують два одноповерхових склади загальною площею 600 м^2 . Вартість побудови складу прямо пропорційна квадрату його площі. Крім того, будівництво 1 м^2 на другому майданчику на 40% дорожче, ніж на першому. Якою має бути площа кожного складу, щоб загальна вартість будівництва була найменшою?
5. Треба виготовити консервну банку циліндричної форми заданого об'єму. Якими мають бути розміри банки, щоб на її виготовлення пішло якомога менше матеріалу?
- Вказівка.* Знайдіть відповідні формули для об'єму циліндра та площі його повної поверхні. Знайдіть діаметр та висоту оптимальної циліндричної банки об'ємом 350 мл. Відповідь округліть до цілих міліметрів.

V. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему обласної олімпіади?

Задача. Чи існує функція $f(x)$, яка визначена на множині дійсних чисел, має похідну у всіх точках та задовольняє умови: 1) при всіх дійсних x виконується нерівність $f(x) \geq f(x + \sin x)$; 2) рівняння $f'(x) = 0$ має скінченну кількість коренів?

Розв'язання. 1) Нехай функція $f(x)$ існує. Розглянемо диференційовну функцію $g(x) = f(x) - f(x + \sin x)$.

Тоді при всіх дійсних x маємо: $g(x) \geq 0$, причому $g(\pi k) = f(\pi k) - f(\pi k + \sin \pi k) = 0$.

Таким чином, в усіх точках виду $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ функція $g(x)$ є диференційовною та набуває найменших значень. Тому ці точки будуть точками локального мінімуму і, за теоремою Ферма, $g'(\pi k) = 0$.

Знайдемо похідну функції $g(x)$: $g'(x) = f'(x) - f'(x + \sin x) \cdot (1 + \cos x)$.

Таким чином, $g'(\pi k) = f'(\pi k) - f'(\pi k + \sin \pi k) \cdot (1 + \cos \pi k)$,

$g'(\pi k) = f'(\pi k) - f'(\pi k) \cdot (1 + \cos \pi k) = 0$, $-f'(\pi k) \cdot \cos \pi k = 0$.

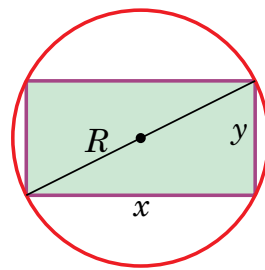
Оскільки $\cos \pi k = \pm 1$, то $f'(\pi k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$ і, відповідно рівняння $f'(x) = 0$ має безліч коренів. Отримали суперечність з умовою задачі.

Відповідь. Не існує.

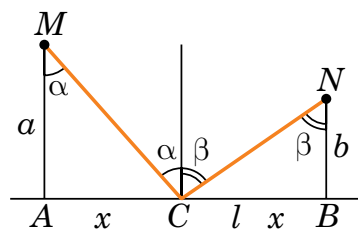
Висновок. Задачі практичного змісту на знаходження найбільшого або найменшого значень доцільно розв'язувати у межах математичної моделі дослідження функції на певній множині аргументів зокрема на відрізку. Для знаходження відповідних формул доцільно скористатися умовою задачі або провести додатковий пошук, використовуючи статистичні дані зокрема економічного характеру, інформацію з відкритих джерел тощо.

VI. Додаткові завдання для самостійного опрацювання

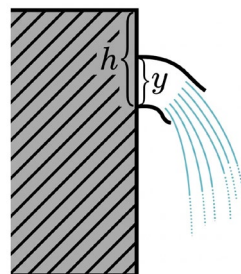
1. У курсі «опір матеріалів» доводять, що сила протидії вигинанню балки (P) прямокутного перерізу пропорційна її ширині x та квадрату її висоти y , тобто $P = kxy^2$. Яким має бути переріз балки з найбільшим опором вигинанню, якщо її вирізати з циліндричної колоди радіуса R (див. рисунок)? На практиці часто користуються пропорційним відношенням $x : y = 5 : 7$. Чи правильне це пропорційне відношення? Чому?



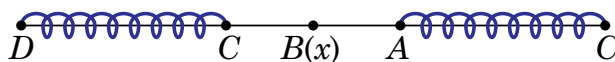
2. Нехай промінь світла виходить з однієї точки, віддзеркалюється від плоского дзеркала та приходить в іншу точку (див. рисунок). Світло рухається таким чином, щоб проходити найменшу відстань. Доведіть за допомогою похідної, що кут падіння світлових променів дорівнює куту відображення відносно дзеркала.



3. Секундні витрати води (Q), яка витікає через круглий отвір у стіні, обчислюється за формулою $Q = ky\sqrt{h - \frac{y}{2}}$, де y — діаметр отвору, h — глибина його найнижчої точки, k — деяка стала величина (див. рисунок). При якому значенні діаметра отвору витрати води будуть найбільшими?



4. Потенціальна енергія (E) розтягнутої пружини обчислюється за формулою $E = \frac{kx^2}{2}$, де k — коефіцієнт жорсткості пружини, x — подовження пружини. Дві пружини, жорсткості яких k_1 і k_2 розташовані уздовж прямої і відстань між їхніми найближчими кінцями $OA = a$ (див. рисунок). Пружини розтягнули та з'єднали у точці B . Для якого положення цієї точки сумарна потенціальна енергія пружин буде найменшою?



VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим

- 4) Для мене було найскладнішим
.
.
- 5) Я припустився/припустилася помилки
.
.
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.
.
- 7) Поради собі до наступного уроку
.
.