

Урок 14. Урок–практикум. Розв’язування оптимізаційних задач прикладного змісту

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

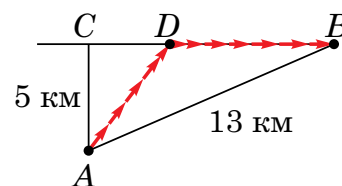
На уроці ви:

- 1) удосконалили свої навички застосування похідної;
- 2) вивчили схему створення математичної моделі розв’язування задач прикладного змісту за допомогою похідної;
- 3) потренувалися розв’язувати прикладні задачі методами математичного аналізу;
- 4) застосували похідну для розв’язування олімпіадної задачі.

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Задачі для обговорення

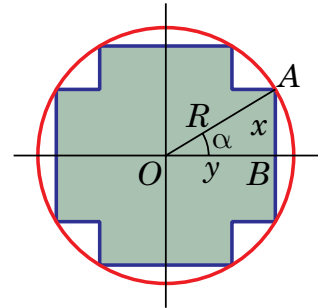
1. Із пункту A , що знаходиться в лісі на відстані 5 км від прямолінійного шосе, пішоходу треба потрапити в пункт B , що знаходиться на цьому ж шосе на відстані 13 км від пункту A . Уздовж шосе пішохід рухається зі швидкістю 5 км/год, а по лісу — зі швидкістю 3 км/год. За який мінімальний час пішохід зможе потрапити з пункту A у пункт B ?



Вказівка. Нехай основа перпендикуляра, проведеного з точки A до шосе, — точка C , а пішохід вийшов на шосе у точці D , що належить відрізку BC .

Якщо $CD = x$ (км), то витрачений час дорівнює $t(x) = \frac{\sqrt{25+x^2}}{3} + \frac{12-x}{5}$, причому $x \in [0; 12]$. Тоді задача зводиться до відшукування найменшого значення функції на відрізку.

2. Користуючись даним рисунком, розв'яжіть задачу. При конструюванні трансформатора змінного струму необхідно заповнити порожнину котушки залізним хрестоподібним осердям з найбільшою площею відповідного перерізу. Якими мають бути розміри x та y перерізу осердя, якщо радіус котушки дорівнює R ?



Вказівка. Нехай $\angle AOB = \alpha$, тоді $x = R \sin \alpha$, $y = R \cos \alpha$.

Тоді площа перерізу осердя буде дорівнювати

$$S = 2 \cdot (2x \cdot 2y) - (2x \cdot 2x) = 4R^2 \sin 2\alpha - 4R^2 \sin^2 \alpha, \text{ причому } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Тепер задача зводиться до відшукування найбільшого значення функції на відрізку. Це значення досягається при $\alpha_0 = \frac{\arctg 2}{2}$, тобто $\alpha_0 \approx 31,7^\circ$.

III. Робота в малих групах. Побудова математичних моделей задач прикладного змісту

Задачі для роботи в малих групах

Заповніть схему розв'язання задач прикладного змісту на знаходження найбільшого або найменшого значень величин за допомогою похідної. Скористайтеся ідеями, аналогічними до тих, що містяться у схемі розв'язування геометричних задач за допомогою похідної.

Схема розв'язання задач прикладного змісту на найбільше або найменше значення величини за допомогою похідної	
Етапи побудови та розв'язання математичної моделі	Задача. Завод А розміщено на відстані 50 км від прямолінійної ділянки залізниці, що проходить через місто В і на відстані 130 км від міста В. Під яким кутом до залізниці треба прокласти дорогу від заводу А, щоб доставка вантажів з А до В була найдешевшою, якщо вартість перевезення залізницею вдвічі менша, ніж дорогою на аналогічну відстань.
1. ...	
2. Позначте одну з невідомих величин змінною.	

**Схема розв'язання задач прикладного змісту
на найбільше або найменше значення величини за допомогою похідної**

Етапи побудови та розв'язання математичної моделі	Задача. Завод A розміщено на відстані 50 км від прямолінійної ділянки залізниці, що проходить через місто B і на відстані 130 км від міста B . Під яким кутом до залізниці треба прокласти дорогу від заводу A , щоб доставка вантажів з A до B була найдешевшою, якщо вартість перевезення залізницею вдвічі менша, ніж дорогою на аналогічну відстань.
3. Визначте, які є обмеження на обрану змінну: 3.1. ... 3.2. ...	
4. Знайдіть формулу, що описує потрібну величину, використовуючи ...	
5. Знайдіть за допомогою похідної найбільше/найменше значення відповідної функції, з урахуванням ...	
6. Запишіть відповідь до заданої задачі прикладного змісту у відповідних термінах.	<i>Відповідь.</i>

IV. Робота в парах. Розв'язування оптимізаційних задач прикладного змісту

Задачі для роботи в парах

- Пункти A, B, C знаходяться у вершинах прямокутного трикутника ABC з прямим кутом при вершині C , причому $AC = 285$ км, $BC = 60$ км. Пункти A та C сполучені прямолінійною ділянкою залізниці. У яку точку відрізка AC треба провести ґрунтову дорогу з пункту B , щоб час перебування у дорозі від A до B був найменшим, якщо відомо, що швидкість руху залізницею становить 52 км/год, а ґрунтовою дорогою — 20 км/год?
- На двох будівельних майданчиках будують два одноповерхових склади загальною площею 600 м^2 . Вартість побудови складу прямо пропорційна квадрату його площі. Крім того, будівництво 1 м^2 на другому майданчику на 40% дорожче, ніж на першому. Якою має бути площа кожного складу, щоб загальна вартість будівництва була найменшою?
- Треба виготовити консервну банку циліндричної форми заданого об'єму. Якими мають бути розміри банки, щоб на її виготовлення пішло якомога менше матеріалу?
Вказівка. Знайдіть відповідні формули для об'єму циліндра та площі його повної поверхні. Знайдіть діаметр та висоту оптимальної циліндричної банки об'ємом 350 мл. Відповідь округліть до цілих міліметрів.

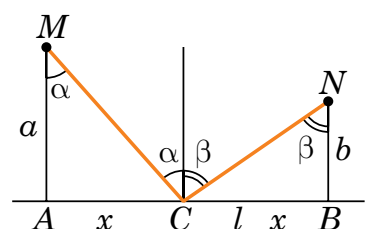
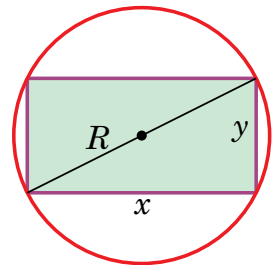
V. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему обласної олімпіади?

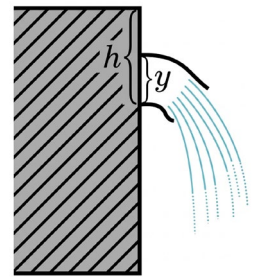
- Задача.** Чи існує функція $f(x)$, яка визначена на множині дійсних чисел, має похідну у всіх точках та задовольняє умови: 1) при всіх дійсних x виконується нерівність $f(x) \geq f(x + \sin x)$; 2) рівняння $f'(x) = 0$ має скінченну кількість коренів?

VI. Додаткові завдання для самостійного опрацювання

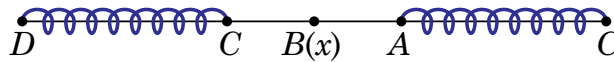
- У курсі «опір матеріалів» доводять, що сила протидії вигинанню балки (P) прямокутного перерізу пропорційна її ширині x та квадрату її висоти y , тобто $P = kxy^2$. Яким має бути переріз балки з найбільшим опором вигинанню, якщо її вирізати з циліндричної колоди радіуса R (див. рисунок)? На практиці часто користуються пропорційним відношенням $x : y = 5 : 7$. Чи правильне це пропорційне відношення? Чому?
- Нехай промінь світла виходить з однієї точки, віддзеркалюється від плоского дзеркала та приходить в іншу точку (див. рисунок). Світло рухається таким чином, щоб проходити найменшу відстань. Доведіть за допомогою похідної, що кут падіння світлових променів дорівнює куту відображення відносно дзеркала.



3. Секундні витрати води (Q), яка витікає через круглий отвір у стіні, обчислюється за формулою $Q = ky\sqrt{h - \frac{y}{2}}$, де y — діаметр отвору, h — глибина його найнижчої точки, k — деяка стала величина (див. рисунок). При якому значенні діаметра отвору витрати води будуть найбільшими?



4. Потенціальна енергія (E) розтягнутої пружини обчислюється за формулою $E = \frac{kx^2}{2}$, де k — коефіцієнт жорсткості пружини, x — подовження пружини. Дві пружини, жорсткості яких k_1 і k_2 розташовані уздовж прямої і відстань між їхніми найближчими кінцями $OA = a$ (див. рисунок). Пружини розтягнули та з'єднали у точці B . Для якого положення цієї точки сумарна потенціальна енергія пружин буде найменшою?



Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

