

Урок 15. Друга похідна. Поняття опуклості функції

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите означення другої похідної функції;
- 2) пригадаєте механічний та геометричний зміст похідної;
- 3) вивчите означення опуклої функції та точок перегину;
- 4) зрозумієте механічний та геометричний зміст другої похідної;
- 5) зрозумієте застосування другої похідної для дослідження функції на опуклість та точки перегину.

II. Поняття другої похідної

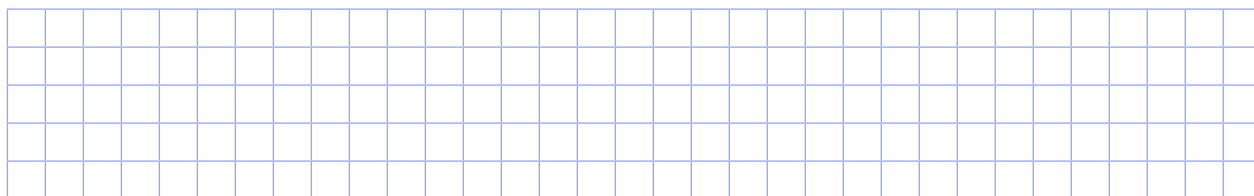
Нехай функція $f(x)$ є диференційованою, тобто має похідну, на деякій множині M аргументів. Розглянемо нову функцію $f'(x)$ на цій множині. Якщо ця функція має похідну в точці x_0 , то її похідну в цій точці позначають $f''(x_0)$. При цьому функцію $f(x)$ називають двічі диференційовною в точці x_0 . Якщо функція є двічі диференційовною у будь-якій точці деякої множини, то її називають двічі диференційовною на цій множині. Якщо функція двічі диференційовна на області визначення, то її називають просто **двічі диференційовна функція**.

Означення. Другою похідною (похідною другого порядку) функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають похідну від функції $f'(x)$ у точці x_0 , тобто $f''(x_0) = (f'(x_0))'$.

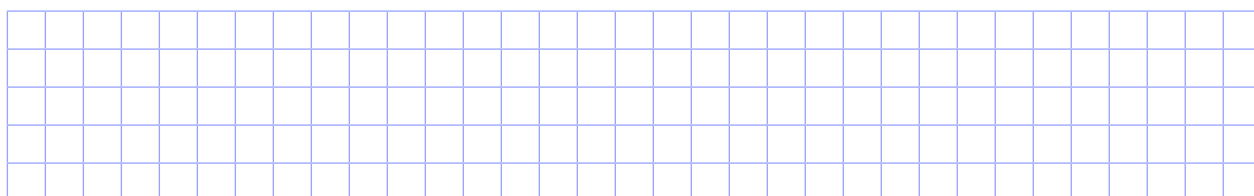
Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має другу похідну у деякій точці (на деякій множині), то її називають **двічі диференційовною в цій точці (на цій множині)**. На множині, де дана функція двічі диференційовна розглядають нову

функцію $y = f''(x)$, яка ставить кожному аргументу x_0 із даної множини у відповідність значення функції, яке дорівнює $f''(x_0)$.

Приклад 1. Знайдіть другу похідну функції $f(x) = \cos^2 x - \sin x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{4}$.



Приклад 2. Знайдіть другу похідну функції $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$.



III. Прискорення тіла як друга похідна функції, що визначає рух тіла

Пригадаємо **механічний зміст похідної функції**.

Якщо тіло рухається вздовж координатної прямої і його положення визначається функцією $s(t)$, то миттєва швидкість тіла (з урахуванням напрямку) в момент часу t_0 визначається за формулою $v(t_0) = s'(t_0)$. Таким чином, $s'(t) = v(t)$.

З аналогічних міркувань можна встановити **механічний зміст другої похідної**.

Нехай тіло рухається уздовж координатної прямої і його миттєва швидкість визначається функцією $v(t)$. Розглянемо середнє прискорення, тобто зміну швидкості (з урахуванням напрямку) впродовж періоду часу від t_0 до t (при $t_0 < t$), або від t до t_0 (при $t < t_0$): $a = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$.

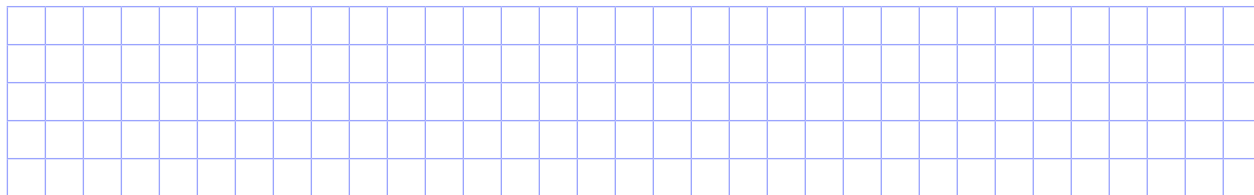
Миттєвим прискоренням у момент часу t_0 назвемо границю, до якої прямує середнє прискорення за умови, що $t \rightarrow t_0$:

$$t \rightarrow t_0 \quad a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}.$$

Якщо функція $v(t)$ є диференційовною в точці t_0 , тобто функція $s(t)$ є двічі диференційовною в ній, отримуємо за означенням похідної: $a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0) = s''(t_0)$.

Отже, якщо тіло рухається уздовж координатної прямої і його положення визначається функцією $s(t)$, то його миттєве прискорення (з урахуванням напрямку) в момент часу t_0 визначається за формулою $a(t_0) = s''(t_0)$. Таким чином, $s''(t) = a(t)$.

Приклад 3. Матеріальна точка рухається вздовж осі Ox за законом $x(t) = 2t^2 + 4t + 5$, де x — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Доведіть, що її рух є рівноприскореним. Знайдіть відповідне прискорення.



IV. Поняття опуклості функції на певному проміжку. Графічна ілюстрація опуклості функції вниз (вгору)

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною на певному проміжку. Розглянемо положення її графіка відносно дотичної у будь-якій точці цього проміжку. Якщо графік знаходиться по один бік від дотичної, то функцію називають опуклою на даному проміжку. Уточнимо це поняття.

Вид опуклості функції, диференційованої на проміжку I	Означення	Графічна ілюстрація
Опукла вниз	Графік функції на проміжку I розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.	
Строго опукла вниз	Графік функції на проміжку I розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку — точку дотику.	
Опукла вгору	Графік функції на проміжку I розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.	

Вид опуклості функції, диференційованої на проміжку I	Означення	Графічна ілюстрація
Строго опукла вгору	Графік функції на проміжку I розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку – точку дотику.	

V. Ознака опуклості функції вниз. Ознака опуклості функції вгору

Пригадаємо *геометричний зміст похідної функції в точці*, який дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в цій точці з додатним напрямком осі абсцис.

Розглянемо тепер ознаки опуклості функції, пов'язані з її другою похідною.

Теорема. Ознака опуклості функції вниз. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовна на проміжку I , причому $f''(x) \geq 0$ для будь-якої точки x із даного проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на проміжку I .

Теорема. Ознака опуклості функції вгору. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовна на проміжку I , причому $f''(x) \leq 0$ для будь-якої точки x із даного проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на проміжку I .

Дані ознаки опуклості функції на проміжку означають, що напрямок опуклості для двічі диференційовної функції визначається знаком її другої похідної.

Це і є *геометричним змістом другої похідної функції*.

Доведемо ознаку опуклості вниз.

Розглянемо дотичну l до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 , що задається формулою $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Розглянемо точку x_1 на проміжку I . Нехай $x_1 > x_0$. Доведемо, що при $x = x_1$ точка графіка функції $y = f(x)$ лежить не нижче, ніж відповідна точка дотичної, тобто

$$f(x_1) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)) \geq 0.$$

Застосуємо на відрізку $[x_0; x_1]$ теорему Лагранжа для функції $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x_1) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)) &= (f(x_1) - f(x_0)) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = \\ &= f'(x_2)(x_1 - x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0), \text{ де } x_2 \text{ — деяка точка з відрізка } [x_0; x_1]. \end{aligned}$$

Перетворимо отриманий вираз і застосуємо теорему Лагранжа на відрізку $[x_0; x_2]$ для функції $y = f'(x)$:

$$f(x_1) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)) = f'(x_2)(x_1 - x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = (x_1 - x_0)(f'(x_2) - f'(x_0));$$

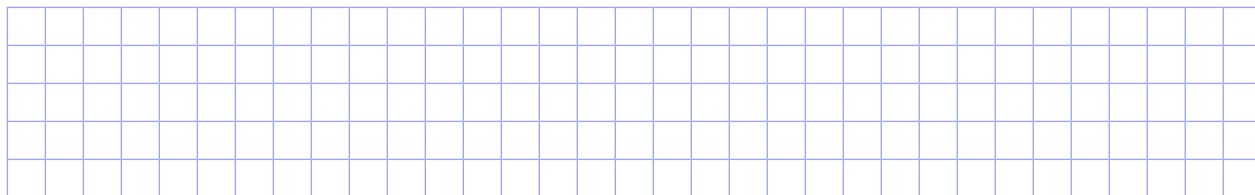
$f(x_1) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)) = (x_1 - x_0)(f'(x_2) - f'(x_0)) = (x_1 - x_0)f'(x_3)(x_2 - x_0)$, де x_3 — деяка точка з відрізка $[x_0; x_2]$.

Всі множники отриманого виразу є невід'ємними, а тому невід'ємним є і значення виразу. Якщо $x_1 > x_0$, то точка графіка функції $y = f(x)$ з абсцисою x_1 лежить не нижче, ніж відповідна точка дотичної.

Аналогічно можна довести, що при $x_1 < x_0$, то точка графіка функції $y = f(x)$ з абсцисою x_1 лежить не нижче, ніж відповідна точка дотичної.

Отже, функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на проміжку I .

Приклад 4. Доведіть, що функція $f(x) = x^2$ є опуклою вниз на всій множині дійсних чисел.



Примітка. Для наочності можна скористатися інтерактивним рисунком, який наочно показує опуклість функції $f(x) = x^2$ на множині дійсних чисел, за допомогою дотичних в різних точках графіка (див. покликання).

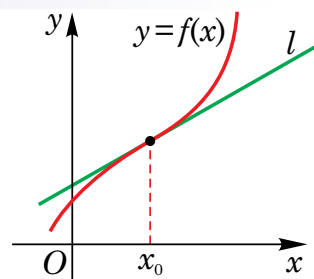


<https://www.geogebra.org/m/reawrhzx>

VI. Точки перегину функції. Графічна ілюстрація. Умова того, що певна точка є точкою перегину функції

Означення. Точка x_0 називається **точкою перегину** функції $y = f(x)$, якщо дотична до графіка у точці $(x_0; f(x_0))$ переходить з одного боку дотичної на інший.

Це означає, що у точці перегину напрямок опуклості функції змінюється. На рисунку при $x \leq x_0$ функція опукла вгору, а при $x \geq x_0$ функція опукла вниз.



Знайти точки перегину, в яких функція змінює напрямок опуклості, допомагає необхідна умова точки перегину.

Теорема. Необхідна умова для точки перегину. Якщо функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою в точці перегину x_0 і при цьому $f''(x)$ є неперервною в точці x_0 , то $f''(x_0) = 0$.

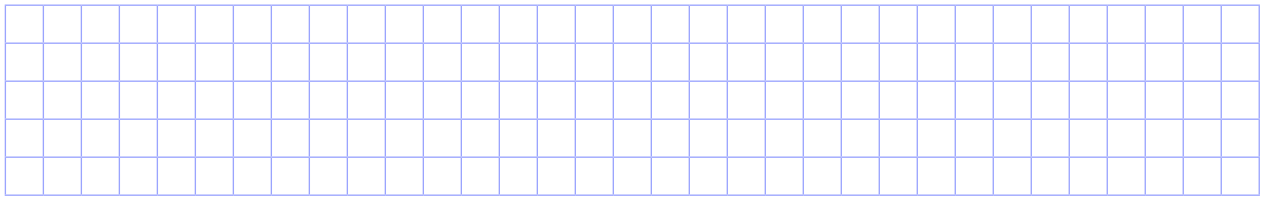
Доведення. Припустимо супротивне, тобто $f''(x_0) \neq 0$. Нехай для визначеності $f''(x_0) > 0$. Оскільки $f''(x)$ є неперервною в точці x_0 , то $f''(x) > 0$ і в деякому околі точки x_0 . Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на цьому околі і напрямок опуклості в точці x_0 не змінюється. Отримали суперечність з означенням точки перегину.

Умова $f''(x_0) = 0$ не є достатньою для того, щоби точка x_0 була точкою перегину. Так, наприклад, для функції $y = x^4$ виконується умова $y''(0) = 0$, але 0 не є точкою перегину цієї функції, вона є опуклою вниз на всій множині дійсних чисел.

Для дослідження функції на опуклість та точки перегину, окрім необхідної умови для точки перегину, доцільно застосувати достатню умову точки перегину.

Теорема. Достатня умова для точки перегину. Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x_0 і має другу похідну у проколотому околі цієї точки. Якщо при переході через x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак на протилежний, то x_0 — точка перегину функції $y = f(x)$.

Приклад 5. Знайдіть точки перегину функції $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 2x + 3$.



VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть другу похідну функції у даній точці:

а) $y = x^5 - 2x^3, x_0 = 1$; б) $y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 1, x_0 = -1$; в) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}, x_0 = 2$.

2. Знайдіть формулу для другої похідної функції:

а) $y = x - \frac{1}{3}x^3$; б) $y = \sin 2x$; в) $f(x) = (2x - 1)^5$.

3. Тіло рухається вздовж координатної прямої за даним законом, де x — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Визначте швидкість та прискорення тіла в заданий момент часу, якщо:

а) $x(t) = 3t^2 + 2t - 1, t_0 = 10$; б) $x(t) = 0,5t^3 + 2t^2 + t + 2, t_0 = 7$;
в) $x(t) = \sin \pi t + \cos \pi t, t_0 = 5$.

4. Доведіть, що функція є опуклою на множині дійсних чисел:

а) $y = x - \frac{1}{4}x^4$; б) $y = 2x^6 + x^4 + x - 3$;

в) $y = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + 1$.

З'ясуйте напрямок опуклості.

5. Знайдіть точки перегину функції:

а) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5x + 3$; б) $y = x^3 - 3x^2 + x - 8$;

в) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

6. Дослідіть функцію на опуклість та точки перегину:

а) $y = 2x^6 - 5x^4$; б) $y = \frac{x}{1 + x^2}$; в) $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{2}{x}$.

Рівень В

1. Знайдіть другу похідну функції у даній точці:

а) $y = \sqrt[3]{x}, x_0 = 8$;

б) $y = \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x - 2}, x_0 = -1$;

в) $f(x) = \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right), x_0 = \frac{\pi}{4}$.

2. Знайдіть формулу для другої похідної функції:

а) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$; б) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $f(x) = x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Одне тіло рухається вздовж координатної прямої за законом $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2t - 1$, а друге — за законом $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 5t - 6$, де x — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Визначте прискорення кожного тіла в момент часу, коли їхні швидкості рівні.

4. Тіло з масою 6 кг рухається вздовж координатної прямої за законом $x(t) = 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1$, де x — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). За другим законом Ньютона, знайдіть силу, яка діє на тіло через 4 секунди після початку руху.

5. Доведіть, що функція є опуклою на множині дійсних чисел:

а) $y = \sin^2 x - 2x^2$; б) $y = \cos^2 x + 2x^2$; в) $y = x^2 + \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$.

З'ясуйте напрямок опуклості.

6. Знайдіть точки перегину функції:

а) $y = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12}$; б) $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$; в) $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x}$.

7. Знайдіть проміжки, на яких графік функції опуклий вгору (вниз):

а) $y = (7 - x^2)^4$; б) $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 5x - 3$; в) $y = \frac{x^2 + x}{x - 1}$.

8. Дослідіть функцію на опуклість та точки перегину:

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$; в) $f(x) = \cos 2x + x^2$.

9. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 18t^2 - t^3$, де x — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Визначте, в який момент часу з проміжку $[0; 20]$ швидкість точки буде найбільшою, та знайдіть значення прискорення в цей момент.

10. Дано функцію $y = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$ Чи є дана функція двічі диференційовна в точці $x_0 = 0$? На множині дійсних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

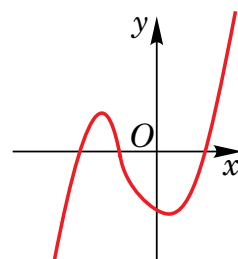
11. Дано функцію $y = x\sqrt[3]{x^2}$. Чи є дана функція двічі диференційовна в точці $x_0 = 0$? Чи є точка $x_0 = 0$ точкою перегину даної функції? Відповідь обґрунтуйте.

12. Побудуйте в одній системі координат графік функції $y = x^2 - 6x + 5$, а також її першої та другої похідної.

Рівень С

1. Дослідіть функцію $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ на опуклість та точки перегину.
2. Знайдіть значення параметру a , при якому точка $x_0 = -1$ є точкою перегину функції $f(x) = x^3 + ax^2$.
3. Знайдіть проміжки опуклості функції:

а) $y = \arcsin x$;
б) $y = \arccos x$;
в) $y = \operatorname{arctg} x$.
4. За графіком функції $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (див. рисунок), знайдіть знаки параметрів a, b, c .



5. Наведіть приклад таких двох функцій, які зростають на проміжку $[0; +\infty)$ а їхні графіки проходять через точку $A(1; 1)$, причому перша опукла вниз, а друга опукла вгору на інтервалі $[0; +\infty)$.
6. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = at^2 + bt + c, a \neq 0$, де x — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть швидкість та прискорення точки, зробіть висновок про характер руху. За якої залежності між параметрами a, b, c даний рух буде рівноприскореним?

Рефлексія

- | | | | | |
|----|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я знаю означення другої похідної та розумію зміст терміну «двічі диференційовна функція». | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю механічний зміст другої похідної. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю означення опуклої вгору (вниз) диференційовної функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю геометричний зміст другої похідної, тобто ознаки напрямку опуклості функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю означення точок перегину та розумію їхній геометричний зміст. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я вмію застосовувати другу похідну для дослідження функції на опуклість та точки перегину. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Застосування другої похідної.
2. Похідні другого та вищих порядків. Їхнє застосування при визначенні точок локального екстремуму.
3. Необхідні та достатні умови опуклості двічі диференційовної функції.
4. Вертикальна дотична до графіка функції. Точки вертикального перегину.

