

Урок 16. Урок–практикум. Застосування другої похідної функції

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) відпрацюєте навички знаходження другої похідної функції;
- 2) розв'яжете завдання на використання механічного змісту похідної та другої похідної;
- 3) навчитеся на практиці досліджувати функцію на опуклість;
- 4) застосуєте необхідні та достатні умови для дослідження точок перегину.

II. Обчислення другої похідної функції

Означення. Другою похідною (похідною другого порядку) функції $y = f(x)$, у точці x_0 називають похідну від функції $f'(x_0)$ у точці x_0 : $f''(x_0) = (f'(x))'(x_0)$.

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має другу похідну у деякій точці (на деякій множині), то її називають двічі диференційованою в цій точці (на цій множині). На множині, де дана функція двічі диференційована, розглядають нову функцію $y = f''(x)$, яка ставить кожному аргументу x_0 з даної множини у відповідність значення функції, що дорівнює $f''(x_0)$.

Завдання для фронтального розв'язання

1. Обчисліть другу похідну функції у даній точці: $f(x) = x^5 - 15x^3 + 8$, $x_0 = 1$.
2. Дано функцію $f(x) = \frac{x-4}{(x+3)^2}$. Знайдіть $f''(0)$.
3. Знайдіть формулу для другої похідної функції $f(x) = x^2 \cdot \cos 2x$.

4. Знайдіть похідну другого порядку для функції $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{\sin 3x}$ та її область визначення.
5. Знайдіть похідну та другу похідну функції $f(x) = \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{ctg}^3 x$. Для яких значень аргументу вони існують?

II. Робота в парах. Знаходження прискорення руху тіла в певний момент часу

Механічний зміст похідної функції

Якщо тіло рухається уздовж координатної прямої, і його положення визначається функцією $S(t)$, то його миттєва швидкість (з урахуванням напрямку) в момент часу t_0 визначається за формулою $v(t_0) = S'(t_0)$. Таким чином, $S'(t) = v(t)$.

Механічний зміст другої похідної.

Якщо тіло рухається уздовж координатної прямої, і його положення визначається функцією $S(t)$, то його миттєве прискорення (з урахуванням напрямку) в момент часу t_0 визначається за формулою $a(t_0) = S''(t_0)$. Таким чином, $S''(t) = a(t)$.

Завдання для роботи в парах.

1. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^2 + 2t + 3$, де S — відстань (у метрах), t — час (в секундах). Знайдіть швидкість і прискорення тіла через 3 секунди після початку руху.
2. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^4 + 3t^2$, де S — відстань (у метрах), t — час (в секундах). Знайдіть швидкість і прискорення тіла через 2 секунди після початку руху.
3. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = 36t^2 - 3t^3$, де S — відстань (у метрах), t — час (в секундах). Знайдіть прискорення тіла через 2 секунди після досягнення ним найбільшої швидкості.
4. Тіло рухається уздовж числової прямої, і його координата змінюється за законом $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{12} + 2t - 1$, де S — відстань (у метрах), t — час (в секундах). Знайдіть момент часу, коли прискорення тіла є найбільшим.
5. Матеріальна точка рухається уздовж числової прямої і його координата змінюється за законом $x(t) = 5t + 6t^2 - t^3$, де S — відстань (у метрах), t — час (в секундах). Знайдіть швидкість у момент часу, коли прискорення дорівнює нулю.

II. Робота в малих групах. Обчислення точок перегину функції

Повторіть теоретичні відомості за таблицею.

Вид опуклості функції, диференційованої на проміжку I	Означення	Графічна ілюстрація
Опукла вниз	Графік функції на проміжку I розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.	
Строго опукла вниз	Графік функції на проміжку I розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку – точку дотику.	
Опукла вгору	Графік функції на проміжку I розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.	
Строго опукла вгору	Графік функції на проміжку I розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку – точку дотику.	

Геометричний зміст похідної функції.

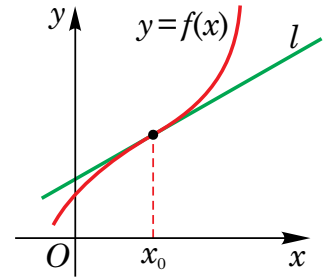
Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x_0 . Тоді $f'(x)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка $f(x)$ в цій точці до додатного напрямку осі абсцис.

Геометричний зміст другої похідної

- Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I , причому $f''(x) \geq 0$ для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на проміжку I .

- 2.** Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I , причому $f''(x) \leq 0$ для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на проміжку I .

Означення. Точка x_0 називається **точкою перегину** функції $y = f(x)$, якщо дотична до графіка у точці $(x_0; f(x_0))$ переходить з одного боку дотичної на інший.



Це означає, що у точці перегину напрямок опуклості функції змінюється. Так, на рисунку при $x \leq x_0$ функція опукла вгору, а при $x \geq x_0$ функція опукла вниз.

Теорема (необхідна умова точки перегину). Якщо функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою в точці перегину x_0 і при цьому $f''(x)$ є неперервною в точці x_0 , то $f''(x_0) = 0$.

Теорема (достатня умова точки перегину). Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x_0 і має другу похідну у проколотому околі цієї точки. Якщо при переході через x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак на протилежний, то x_0 — точка перегину функції $y = f(x)$.

Завдання для роботи в малих групах

Заповніть схему дослідження функції на опуклість та точки перегину, обґрунтовуючи кожний етап для даних двох прикладів. Обговоріть труднощі, які можуть виникнути при реалізації всіх етапів. Підтвердіть проведені дослідження за допомогою побудови відповідних графіків, наприклад, у програмі GeoGebra.

Схема дослідження функції на опуклість та точки перегину		
Етапи дослідження	Приклад 1. $f(x) = (x^2 - 49)^4$	Приклад 2. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 3}$
1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.		
2. Знайдіть другу похідну даної функції та формальну область її визначення $D(f'')$.		
3. Знайдіть корені рівняння $f''(x) = 0$.		
4. Нанесіть знайдені корені на спільну частину $D(f)$ та $D(f'')$ і визначте знаки другої похідної на кожному з утворених інтервалів.		

Схема дослідження функції на опуклість та точки перегину

Етапи дослідження	Приклад 1. $f(x) = (x^2 - 49)^4$	Приклад 2. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 3}$
5. Користуючись ознаками опуклості функції вниз ($f''(x) \geq 0$) і вгору ($f''(x) \leq 0$), визначте проміжки опуклості даної функції. Користуючись достатньою умовою, визначте точки перегину.		
6. Запишіть у відповідь: — проміжки опуклості вниз даної функції, розділяючи їх крапкою з комою; — проміжки опуклості вгору даної функції, розділяючи їх крапкою з комою; — точки перегину.		

Висновок. За допомогою другої похідної можна розв'язувати як завдання, пов'язані із рухом тіла (знаходити прискорення), так і завдання, пов'язані із формою графіка функції (знаходити напрямки опуклості та точки перегину).

IV. Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайдіть другу похідну функції $f(x) = \sqrt{2x^3 - 6x^2 + 3x}$.
2. Знайдіть другу похідну функції $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}$ та точки, у яких вона є неперервною.
3. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = \sqrt[3]{1+t}$ (v – в метрах за секунду, t – в секундах). Знайдіть швидкість і прискорення тіла через 7 секунд після початку руху.
4. Одне тіло рухається уздовж координатної прямої за законом $x(t) = 4t^2 + 2$, а друге за законом $x(t) = 3t^2 + 4t - 1$ (x – у метрах, t – у секундах). Визначте швидкість та прискорення кожного тіла в момент часу, коли їхні координати рівні.
5. Одне тіло рухається уздовж координатної прямої за законом $x(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$, а друге за законом $x(t) = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (x – у метрах, t – у секундах). Визначте прискорення кожного тіла в момент часу, коли їхні швидкості рівні.
6. Тіло з масою m_0 рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{2}{2t-1}$, $t \geq 1$, де x — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Доведіть, що сила, яка діє на дане тіло, пропорційна кубу його координати.

- 7.** Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = at^2 + bt + c, a \neq 0$, де x — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Доведіть, що сила, яка діє на дану матеріальну точку, є постійною.
- 8.** Знайдіть точки перегину функції $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 11x + 7$.
- 9.** Знайдіть проміжки та напрямки опуклості, а також точки перегину функції $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$
- 10.** Дослідіть функцію $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+4}$ на опуклість та точки перегину.

Рефлексія

- | | | | | |
|-----------|---|-----|------------------------|----|
| 1. | Я вмію знаходити другу похідну функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію застосовувати механічний зміст другої похідної. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію знаходити напрямки опуклості функції за допомогою другої похідної. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію знаходити точки перегину за допомогою другої похідної. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю геометричний зміст точок перегину. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю схему застосування другої похідної для дослідження функції на опуклість та точки перегину. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

