

### Урок 17. Урок–практикум. Знаходження проміжків опуклості функції

#### РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

#### I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) відпрацюєте вміння та навички знаходження другої похідної функції;
- 2) удосконалите навички застосування другої похідної для знаходження точок перегину функції;
- 3) удосконалите навички по дослідженню функції на опуклість;
- 4) розв'яжете графічні завдання на зв'язок першої та другої похідних функції.

#### II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

##### Завдання для перевірки

1. Знайдіть другу похідну функції у даній точці:  $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$ ,  $x_0 = 2$ .
2. Знайдіть формулу для другої похідної функції:  $f(x) = (2x - 1)^5$ .
3. Тіло з масою 6 кг рухається уздовж координатної прямої за законом  $x(t) = 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1$ , де  $x$  — відстань (у метрах),  $t$  — час (у секундах). Використовуючи другий закон Ньютона, знайдіть силу, що діє на тіло через 4 секунди після початку руху.
4. Знайдіть точки перегину даної функції:  $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x}$ .
5. Дослідіть функцію  $f(x) = \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 4}$  на опуклість та точки перегину.

## Завдання для обговорення

1. Дано функцію  $y = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$  Чи є дана функція двічі диференційована в точці  $x_0 = 0$ ? А на множині дійсних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

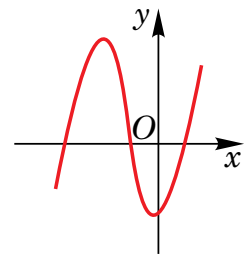
*Вказівка.* Для знаходження похідної та другої похідної в точці 0 доцільно використати односторонні границі, що відповідатимуть означенню похідної функції в точці, а також першу чудову границю. Також корисно побудувати графіки даної функції, її похідної, другої похідної.

2. Знайдіть значення параметру  $a$ , при якому точка  $x_0 = -1$  буде точкою перегину функції  $f(x) = x^3 + ax^2$ .

*Вказівка.* Доцільно скористатися схемою дослідження функції на опуклість та точки перегину. Точка перегину має вид  $x_0 = -\frac{a}{3}$ .

3. Користуючись даним графіком функції  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  (див. рисунок) знайдіть знаки параметрів  $a, b, c$ .

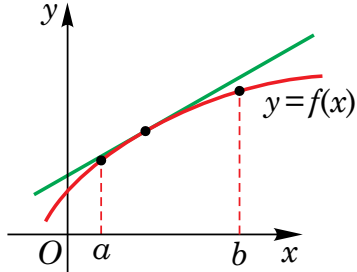
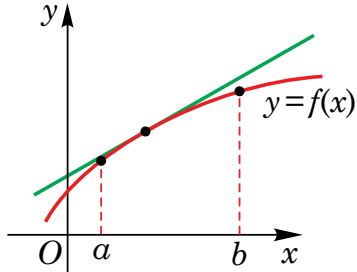
*Вказівка.* Знак параметру  $c$  збігається зі знаком  $f(0)$ . Знак коефіцієнта  $b$  збігається зі знаком  $f'(0)$ , тобто тангенсом кута нахилу дотичної в точці 0 до горизонтального напрямку осі абсцис. Знак коефіцієнта  $a$  можна визначити з розгляду точки перегину.



## III. Робота в парах. Знаходження точок перегину функції

Повторимо опуклість функції за таблицею.

| Вид опуклості функції, диференційованої на проміжку $I$ | Означення                                                                                                                                                                            | Графічна ілюстрація |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| Опукла вниз                                             | Графік функції на проміжку $I$ розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.                                                                             |                     |
| Строго опукла вниз                                      | Графік функції на проміжку $I$ розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку – точку дотику. |                     |

| Вид опуклості функції, диференційованої на проміжку $I$ | Означення                                                                                                                                                                           | Графічна ілюстрація                                                                 |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Опукла вгору                                            | Графік функції на проміжку $I$ розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.                                                                             |  |
| Строго опукла вгору                                     | Графік функції на проміжку $I$ розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку – точку дотику. |  |

### Геометричний зміст похідної функції

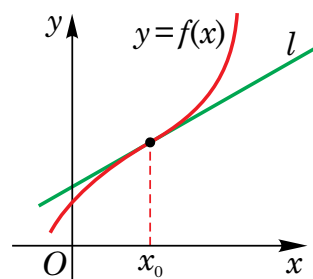
Нехай функція  $y = f(x)$  є диференційованою в точці  $x_0$ . Тоді  $f'(x)$  дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка  $f(x)$  в цій точці до додатного напрямку осі абсцис.

### Геометричний зміст другої похідної

- Нехай функція  $y = f(x)$  є двічі диференційованою на проміжку  $I$ , причому  $f''(x) \geq 0$  для будь-якої точки  $x$  на цьому проміжку. Тоді функція  $y = f(x)$  є опуклою вниз на проміжку  $I$ .
- Нехай функція  $y = f(x)$  є двічі диференційованою на проміжку  $I$ , причому  $f''(x) \leq 0$  для будь-якої точки  $x$  на цьому проміжку. Тоді функція  $y = f(x)$  є опуклою вгору на проміжку  $I$ .

**Означення.** Точка  $x_0$  називається **точкою перегину** функції  $y = f(x)$ , якщо дотична до графіка у точці  $(x_0; f(x_0))$  переходить з одного боку дотичної на інший.

Це означає, що у точці перегину напрямок опуклості функції змінюється. Так, на рисунку при  $x \leq x_0$  функція опукла вгору, а при  $x \geq x_0$  функція опукла вниз.



**Теорема (необхідна умова точки перегину).** Якщо функція  $y = f(x)$  є двічі диференційованою в точці перегину  $x_0$  і при цьому  $f''(x)$  є неперервною в точці  $x_0$ , то  $f''(x_0) = 0$ .

**Теорема (достатня умова точки перегину).** Нехай функція  $y = f(x)$  є диференційованою в точці  $x_0$  і має другу похідну у проколотому околі цієї точки. Якщо при переході через  $x_0$  друга похідна  $f''(x)$  змінює знак на протилежний, то  $x_0$  — точка перегину функції  $y = f(x)$ .

### Завдання для роботи в парах.

1. Знайдіть точки перегину функції  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 72x^2 + 3x + 4$ .
2. Знайдіть точки перегину функції  $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}$ .
3. Знайдіть точки перегину функції  $f(x) = 6x^4 + \frac{1}{x^3}$ .

## IV. Робота в малих групах. Знаходження проміжків опуклості функції

### Схема дослідження функції на опуклість та точки перегину

1. Знайдіть область визначення функції  $D(f)$ .
2. Знайдіть другу похідну даної функції та формальну область її визначення  $D(f'')$ .
3. Знайдіть корені рівняння  $f''(x) = 0$ .
4. Нанесіть знайдені корені на спільну частину  $D(f)$  та  $D(f'')$  і визначте знаки другої похідної на кожному з утворених інтервалів.
5. Користуючись ознаками опуклості функції вниз ( $f''(x) \geq 0$ ) і вгору ( $f''(x) \leq 0$ ), визначте проміжки опуклості даної функції. Користуючись достатньою умовою, визначте точки перегину.
6. Запишіть у відповідь:
  - проміжки опуклості вниз даної функції, розділяючи їх крапкою з комою;
  - проміжки опуклості вгору даної функції, розділяючи їх крапкою з комою;
  - точки перегину.

### Завдання для роботи в малих групах

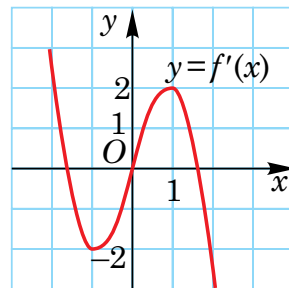
4. Знайдіть проміжки, на яких функція  $f(x) = 0,5x^2 - \frac{6}{x^2}$  опукла вгору.
5. Знайдіть проміжки, на яких функція  $f(x) = \sin^2 3x$  опукла вниз.
6. Дослідіть функцію  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  на опуклість та точки перегину. Урахуйте, що друга похідна даної функції має три корені, один з яких є натуральним числом.

## V. Розв'язування графічних завдань, пов'язаних із другою похідною

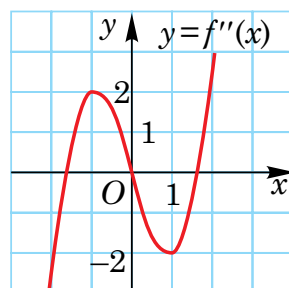
Завдання цього етапу зазвичай є незвичними, а тому складними для учнів/учениць. Отже, доцільно розбирати їх разом, методом «мозкового штурму», під керівництвом вчителя.

### Завдання для розв'язання методом «мозкового штурму»

7. Функція  $f(x)$  двічі диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку зображено графік похідної функції  $f'(x)$ . Укажіть проміжки опуклості та точки перегину функції  $f(x)$ .



8. Функція  $f(x)$  двічі диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку зображено графік її другої похідної. Відомо, що  $f'(x_0) = 0$ . Визначте, чи є точка  $x_0$  точкою локального екстремуму, якщо: а)  $x_0 = -1$ ; б)  $x_0 = 1$ ; в)  $x_0 = 0$ . У разі ствердної відповіді з'ясуйте чи є  $x_0$  точкою мінімуму чи максимуму.



**Висновок.** За допомогою першої похідної зручно досліджувати функцію на монотонність та точки локального екстремуму, а за допомогою другої похідної зручно досліджувати функцію на опуклість та точки перегину.

## VI. Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що функція  $f(x) = x \cdot \arctg x$  є опуклою вниз на множині дійсних чисел.
2. Знайдіть точки перегину функції  $f(x) = x^3 - 3E^2 - 9E + 6$ .
3. Знайдіть проміжки та напрямки опуклості, а також точки перегину функції 
$$f(x) = \frac{2E}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$
4. Дослідіть функцію  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  на опуклість та точки перегину.
5. Дослідіть функцію  $f(x) = x^4 - 12E^3 + 48E^2 - 5E + 2$  на опуклість та точки перегину. Знайдіть кути, під якими дотичні до цього графіка в точках перегину перетинають вісь абсцис.

## Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що .....  
.....  
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що .....  
.....  
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію .....  
.....  
.....
- 4) Найскладнішим для мене було .....  
.....  
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності .....  
.....  
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося .....  
.....  
.....







