

Урок 17. Урок–практикум. Знаходження проміжків опуклості функції

Тип уроку: урок закріплення вмінь та навичок.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в парах. Знаходження точок перегину функції.
3. Робота в малих групах. Знаходження проміжків опуклості функції.
4. Розв'язування графічних завдань, пов'язаних із другою похідною.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку — закріплення умінь і навичок застосування геометричного змісту другої похідної.
- 2) Додаткова мета уроку — повторення властивостей похідної та методу інтервалів.
- 3) Обговоріть фронтально «ідейні» задачі домашнього завдання. При необхідності використайте опитування біля дошки або інші форми роботи.
- 4) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 5) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.

6) Розв'яжіть з учнями/ученицями фронтально декілька завдань для формування стійких вмінь та навичок по знаходженню другої похідної та її застосуванню. При необхідності використовуйте опитування біля дошки або інші форми роботи.

7) Організуйте роботу в парах на знаходження точок перегину графіка функції.

8) Організуйте роботу в малих групах для знаходження проміжків опуклості функції. Об'єднуємо учнів/учениць у кілька груп (4 – 6 груп).

9) Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Знайдіть другу похідну функції у даній точці: $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$, $x_0 = 2$.

Відповідь. 18.

2. Знайдіть формулу для другої похідної функції: $f(x) = (2x - 1)^5$.

Відповідь. $f''(x) = 80(2x - 1)^3$.

3. Тіло з масою 6 кг рухається уздовж координатної прямої за законом $x(t) = 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1$, де x — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Використовуючи другий закон Ньютона, знайдіть силу, що діє на тіло через 4 секунди після початку руху.

Відповідь. 324 Н.

4. Знайдіть точки перегину даної функції: $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x}$.

Відповідь. -1.

5. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 4}$ на опуклість та точки перегину.

Відповідь. Функція $f(x)$ опукла вниз на проміжках $(-\infty; -2\sqrt{3}]$; $[0; 2\sqrt{3}]$, опукла вгору на проміжках $[-2\sqrt{3}; 0]$; $[2\sqrt{3}; +\infty)$, має точки перегину $0; \pm 2\sqrt{3}$.

Завдання для обговорення

1. Дано функцію $y = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$ Чи є дана функція двічі диференційована в точці

$x_0 = 0$? А на множині дійсних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка. Для знаходження похідної та другої похідної в точці 0 доцільно використати односторонні границі, що відповідадуть означенню похідної функції

в точці, а також першу чудову границю. Також корисно побудувати графіки даної функції, її похідної, другої похідної.

Відповідь. Так.

- 2.** Знайдіть значення параметру a , при якому точка $x_0 = -1$ буде точкою перегину функції $f(x) = x^3 + ax^2$.

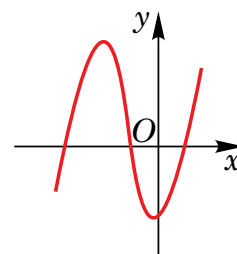
Вказівка. Доцільно скористатися схемою дослідження функції на опуклість та точки перегину. Точка перегину має вид $x_0 = -\frac{a}{3}$.

Відповідь. 3.

- 3.** Користуючись даним графіком функції $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (див. рисунок) знайдіть знаки параметрів a, b, c .

Вказівка. Знак параметру c збігається зі знаком $f(0)$. Знак коефіцієнта b збігається зі знаком $f'(0)$, тобто тангенсом кута нахилу дотичної в точці O до горизонтального напрямку осі абсцис. Знак коефіцієнта a можна визначити з розгляду точки перегину.

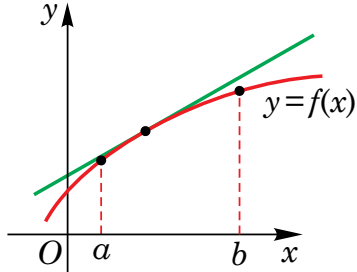
Відповідь. $a > 0, b < 0; c < 0$.



II. Робота в парах. Знаходження точок перегину функції

Повторимо опуклість функції за таблицею.

Вид опуклості функції, диференційованої на проміжку I	Означення	Графічна ілюстрація
Опукла вниз	Графік функції на проміжку I розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.	
Строго опукла вниз	Графік функції на проміжку I розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку – точку дотику.	
Опукла вгору	Графік функції на проміжку I розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.	

Вид опуклості функції, диференційованої на проміжку I	Означення	Графічна ілюстрація
Строго опукла вгору	Графік функції на проміжку I розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку – точку дотику.	

Геометричний зміст похідної функції

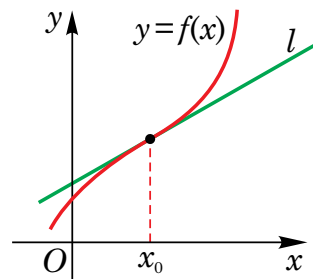
Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x_0 . Тоді $f'(x)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка $f(x)$ в цій точці до додатного напрямку осі абсцис.

Геометричний зміст другої похідної

- Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I , причому $f''(x) \geq 0$ для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на проміжку I .
- Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I , причому $f''(x) \leq 0$ для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на проміжку I .

Означення. Точка x_0 називається **точкою перегину** функції $y = f(x)$, якщо дотична до графіка у точці $(x_0; f(x_0))$ переходить з одного боку дотичної на інший.

Це означає, що у точці перегину напрямок опуклості функції змінюється. Так, на рисунку при $x \leq x_0$ функція опукла вгору, а при $x \geq x_0$ функція опукла вниз.



Теорема (необхідна умова точки перегину). Якщо функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою в точці перегину x_0 і при цьому $f''(x)$ є неперервною в точці x_0 , то $f''(x_0) = 0$.

Теорема (достатня умова точки перегину). Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x_0 і має другу похідну у проколотому околі цієї точки. Якщо при переході через x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак на протилежний, то x_0 — точка перегину функції $y = f(x)$.

Завдання для роботи в парах.

- Знайдіть точки перегину функції $f(x) = x^4 - 2x^3 - 72x^2 + 3x + 4$.

2. Знайдіть точки перегину функції $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}$.
3. Знайдіть точки перегину функції $f(x) = 6x^4 + \frac{1}{x^3}$.

III. Робота в малих групах. Знаходження проміжків опуклості функції

Схема дослідження функції на опуклість та точки перегину

1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.
2. Знайдіть другу похідну даної функції та формальну область її визначення $D(f'')$.
3. Знайдіть корені рівняння $f''(x) = 0$.
4. Нанесіть знайдені корені на спільну частину $D(f)$ та $D(f'')$ і визначте знаки другої похідної на кожному з утворених інтервалів.
5. Користуючись ознаками опуклості функції вниз ($f''(x) \geq 0$) і вгору ($f''(x) \leq 0$), визначте проміжки опуклості даної функції. Користуючись достатньою умовою, визначте точки перегину.
6. Запишіть у відповідь:
 - проміжки опуклості вниз даної функції, розділяючи їх крапкою з комою;
 - проміжки опуклості вгору даної функції, розділяючи їх крапкою з комою;
 - точки перегину.

Завдання для роботи в малих групах

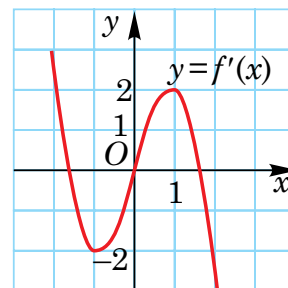
4. Знайдіть проміжки, на яких функція $f(x) = 0,5x^2 - \frac{6}{x^2}$ опукла вгору.
5. Знайдіть проміжки, на яких функція $f(x) = \sin^2 3x$ опукла вниз.
6. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ на опуклість та точки перегину. Урахуйте, що друга похідна даної функції має три корені, один з яких є натуральним числом.

IV. Розв'язування графічних завдань, пов'язаних із другою похідною

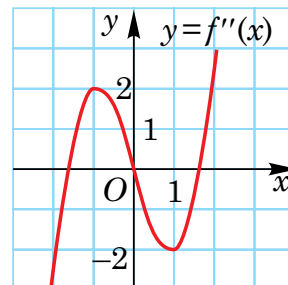
Завдання цього етапу зазвичай є незвичними, а тому складними для учнів/учениць. Отже, доцільно розбирати їх разом, методом «мозкового штурму», під керівництвом вчителя.

Завдання для розв'язання методом «мозкового штурму»

7. Функція $f(x)$ двічі диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку зображено графік похідної функції $f'(x)$. Укажіть проміжки опуклості та точки перегину функції $f(x)$.



8. Функція $f(x)$ двічі диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку зображено графік її другої похідної. Відомо, що $f'(x_0) = 0$. Визначте, чи є точка x_0 точкою локального екстремуму, якщо: а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = 0$. У разі ствердної відповіді з'ясуйте чи є x_0 точкою мінімуму чи максимуму.



Висновок. За допомогою першої похідної зручно досліджувати функцію на монотонність та точки локального екстремуму, а за допомогою другої похідної зручно досліджувати функцію на опуклість та точки перегину.

V. Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що функція $f(x) = x \cdot \arctg x$ є опуклою вниз на множині дійсних чисел.
2. Знайдіть точки перегину функції $f(x) = x^3 - 3E^2 - 9E + 6$.
3. Знайдіть проміжки та напрямки опуклості, а також точки перегину функції $f(x) = \frac{2E}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.
4. Дослідіть функцію $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ на опуклість та точки перегину.
5. Дослідіть функцію $f(x) = x^4 - 12E^8 + 48E^2 - 5E + 2$ на опуклість та точки перегину. Знайдіть кути, під якими дотичні до цього графіка в точках перегину перетинають вісь абсцис.

VI. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-