

### Урок 18. Нерівність Єнсена

#### РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

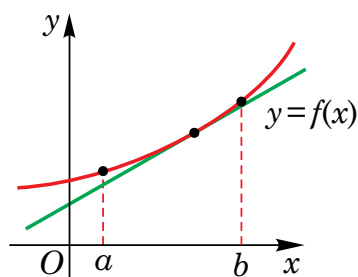
#### I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

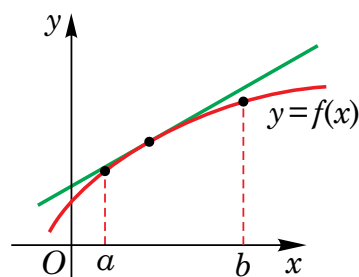
- 1) вивчите властивості хорд графіків опуклих функцій;
- 2) порівняєте розташування графіків опуклих функцій відносно їхніх хорд та дотичних;
- 3) познайомитеся з нерівністю для середини відрізка;
- 4) познайомитеся з нерівністю Єнсена для опуклих униз (угору) функцій;
- 5) вивчите застосування нерівності Єнсена для доведення нерівностей із декількома змінними.

#### II. Графік опуклої функції та його хорди

Нехай функція  $f(x)$  є диференційованою на проміжку  $I$ . Тоді для функцій, опуклих униз, графік лежить не нижче будь-якої дотичної, що проведена до графіка в точці цього проміжку. Для функцій, опуклих угору, графік лежить не вище будь-якої дотичної, що проведена до графіка в точці цього проміжку.



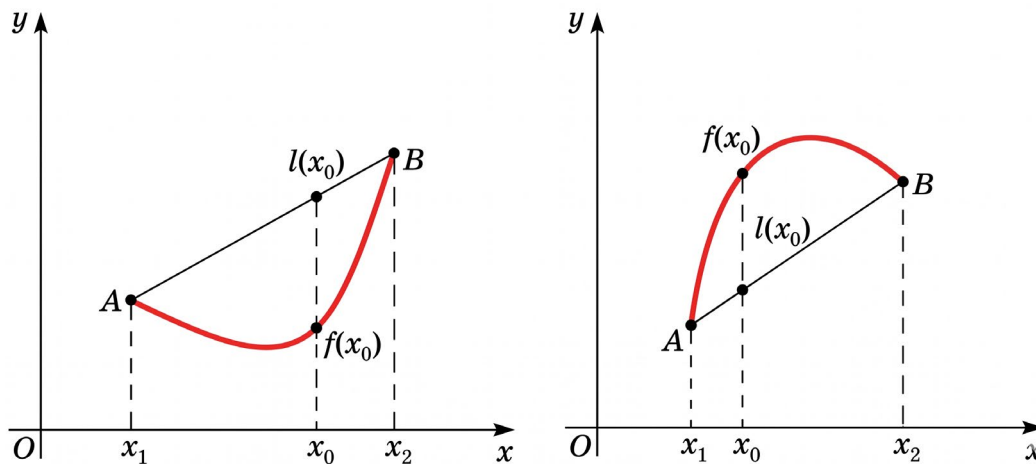
Функція, опукла вгору  
на відрізку  $[a; b]$



Функція, опукла вниз  
на відрізку  $[a; b]$

Розглянемо хорду графіка — відрізок, що сполучає дві точки цього графіка.

Для опуклих униз функцій відповідна частина графіка лежить під цією хордою, а для опуклих угору — над нею (див. рисунки).



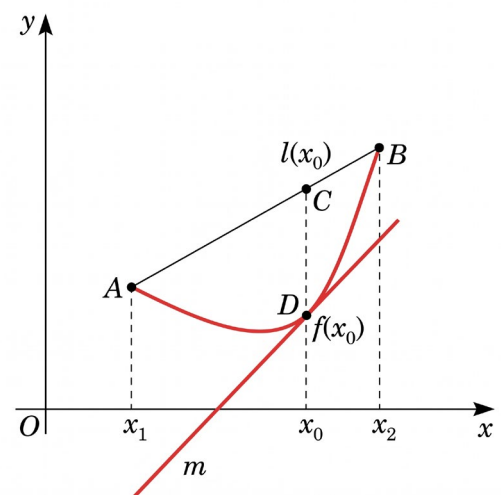
Іноколи цю властивість обирають у якості означення функцій, опуклих униз (угору). Для диференційовних опуклих функцій відповідний факт витікає з теорем, наведених нижче.

**Теорема (властивість опуклої вниз функції).** Нехай функція  $y = f(x)$  є опуклою вниз на проміжку  $I$ . Тоді для будь-яких точок  $x_1 < x_2$  цього проміжку графік функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[x_1; x_2]$  лежить не вище хорди  $AB$ , де  $A(x_1; f(x_1))$ ,  $B(x_2; f(x_2))$ .

**Теорема (властивість опуклої вгору функції).** Нехай функція  $y = f(x)$  є опуклою вгору на проміжку  $I$ . Тоді для будь-яких точок  $x_1 < x_2$  цього проміжку графік функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[x_1; x_2]$  лежить не нижче хорди  $AB$ , де  $A(x_1; f(x_1))$ ,  $B(x_2; f(x_2))$ .

Доведемо, наприклад, першу з цих двох теорем.

Розглянемо будь-яку точку  $x_0$  між точками  $x_1$  та  $x_2$ , та дотичну  $m$  до графіка функції  $y = f(x)$  у цій точці. Оскільки дана функція є опуклою вниз на проміжку  $I$ , то її графік на цьому проміжку, зокрема і на відрізку  $[x_1; x_2]$ , лежить не нижче  $m$ . Таким чином, точки  $A(x_1; f(x_1))$ ,  $B(x_2; f(x_2))$  лежать не нижче від проведеної дотичної. Тоді й будь-яка точка відрізка  $AB$  лежить не нижче від  $m$ . Зокрема, якщо на даному відрізку розглянути точку  $l(x_0)$ , то вона буде розташована не нижче від точки графіка  $D(x_0; f(x_0))$ . Оскільки така властивість справджується для будь-якої точки  $x_0 \in [x_1; x_2]$ , то графік функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[x_1; x_2]$  лежить не нижче хорди  $AB$ , що й потрібно було довести.



Для подальшого дослідження нам стане у нагоді наслідок розглянутих теорем для випадку, коли розглядається середина деякої хорди графіка опуклої функції.

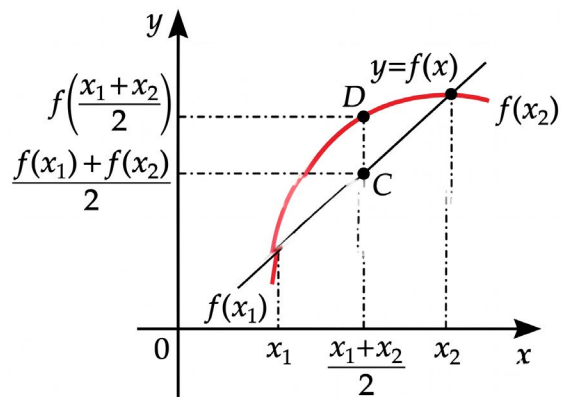
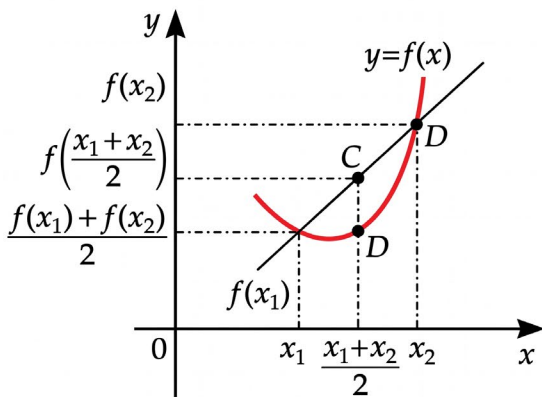
**Наслідок (властивість опуклої функції).** Нехай функція  $y = f(x)$  є опуклою на проміжку  $I$ . Тоді для будь-яких точок  $x_1, x_2$  цього проміжку справджується нерівність:

- $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  для випадку функції, опуклої вниз;
- $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  для випадку функції, опуклої вгору.

*Доведення.* Розглянемо  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  — середину відрізка  $[x_1; x_2]$  при  $x_1 \leq x_2$ , або ж середину відрізка  $[x_2; x_1]$  при  $x_1 > x_2$ . Тоді середина  $C$  хорди  $AB$ , де  $A(x_1; f(x_1))$ ,  $B(x_2; f(x_2))$ , має координати  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right)$ , а відповідна точка  $D$  графіка має координати  $D\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$ .

Для опуклої вниз функції  $C$  лежить не нижче  $D$ , тому  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ .

Для опуклої вгору функції  $C$  лежить не вище  $D$ , тому  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ .



### III. Доведення нерівності Єнсена

Важливим узагальненням отриманих властивостей є теорема Єнсена.

**Теорема (нерівність Єнсена).** Нехай функція  $y = f(x)$  є опуклою на проміжку  $I$ . Тоді для будь-яких точок  $x_1, x_2, \dots, x_n$  цього проміжку справджується нерівність:

- $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$  для випадку функції, опуклої вниз;
- $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$  для випадку функції, опуклої вгору.

Доведемо, наприклад, нерівність Єнсена для функції  $y = f(x)$ , опуклої вниз на проміжку  $I$ .

Для доведення використаємо метод математичної індукції.

- 1.** Спочатку доведемо, що нерівність Єнсена справджується для випадку  $n = 2^k$ .

База індукції, при  $k = 1$ .

$n = 2^1 = 2$ ,  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  — нерівність справджується за доведеною властивістю опуклої вниз функції.

**Індукційний перехід.** Нехай розглядувана нерівність справджується при  $n = 2^k$ , тоді доведемо, що вона справджується і при  $n = 2^{k+1}$ .

Очевидно, що кожне з чисел  $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \dots, \frac{x_{2^{k+1}-1} + x_{2^{k+1}}}{2}$  належить проміжку  $I$ , а кількість цих чисел дорівнює  $2^{k+1} : 2 = 2^k$ . Скористаємося припущенням індукції та базою:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) &= f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \dots + \frac{x_{2^{k+1}-1} + x_{2^{k+1}}}{2}}{2^k}\right) \leq \\ &\leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{2^{k+1}-1} + x_{2^{k+1}}}{2}\right)}{2^k} \leq \\ &\leq \frac{\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \dots + \frac{f(x_{2^{k+1}-1}) + f(x_{2^{k+1}})}{2}}{2^k} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Згідно з принципом математичної індукції, нерівність Єнсена у даному випадку доведено.

- 2.** Доведемо тепер, що нерівність Єнсена справджується для випадку  $n \neq 2^k$ .

Оскільки будь-яке натуральне число, що не є степенем числа 2, можна обмежити нерівністю  $2^p < n < 2^{p+1}$ , то достатньо довести твердження, що з правильності нерівності Єнсена для  $m$  чисел випливає її правильність для  $m - 1$  числа.

Розглянемо допоміжне твердження.

**Лема (властивість середнього арифметичного).** Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  лежать на проміжку  $I$ , а їхнє середнє арифметичне дорівнює  $A_{m-1} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}}{m-1}$ .

Тоді:

- $A_{m-1}$  належить проміжку  $I$ ;
- середнє арифметичне чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, A_{m-1}$  дорівнює  $A_{m-1}$ .

*Доведення.* Нехай, для визначеності,  $a \leq x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \leq b$ .

Тоді  $(m-1)a \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} \leq (m-1)b$ , звідки  $a \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}}{m-1} \leq b$ , тобто  $A_{m-1}$

належить проміжку  $I$ .

Розглянемо середнє арифметичне чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, A_{m-1}$ :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} + A_{m-1}}{m} = \frac{(m-1)A_{m-1} + A_{m-1}}{m} = \frac{mA_{m-1}}{m} = A_{m-1}.$$

Лему доведено.

Застосуємо щойно доведену лему для доведення твердження.

Нехай нерівність Єнсена справджується для будь-яких  $m$  чисел із проміжку  $I$ , тоді вона справджується для будь-яких  $m-1$  чисел з цього проміжку.

Нехай числа  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  лежать на проміжку  $I$ , тоді й  $A_{m-1}$ , за лемою, лежить на ньому.

За лемою та нерівністю Єнсена для  $m$  чисел маємо:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}}{m-1}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} + A_{m-1}}{m}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1}) + f(A_{m-1})}{m},$$

$$f(A_{m-1}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})}{m} + \frac{f(A_{m-1})}{m};$$

$$\frac{m-1}{m} f(A_{m-1}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})}{m};$$

$$f(A_{m-1}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})}{m-1};$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}}{m-1}\right) \leq f\left(\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})}{m-1}\right), \text{ що й потрібно було довести.}$$

## IV. Застосування нерівності Єнсена

### Ілюстративні приклади

1. Доведіть нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним де-

кількох чисел:  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$

*Доведення.* Розглянемо функцію  $f(x) = x^2$  та її першу й другу похідні:  $f'(x) = 2x$ ;  $f''(x) = 2 > 0$ .

Отже, функція  $f(x) = x^2$  є опуклою вниз, за ознакою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ .

За нерівністю Єнсена отримуємо:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}.$$

Звідси  $\left|\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ , а тому й

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

- 2.** Для додатних чисел  $a, b, c$ , сума яких дорівнює 1, доведіть нерівність:

$$\frac{1}{a^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 3} \leq \frac{27}{28}.$$

*Доведення.* Розглянемо функцію  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$  на проміжку  $(0; 1)$  та її першу й дру-

гу похідні:  $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 3}\right)' = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2},$

$$f''(x) = \left(\frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}\right)' = \frac{-2(x^2 + 3)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^4} = \frac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}.$$

Якщо  $x \in (0; 1)$ , то  $f''(x) < 0$ , і функція  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$  є опуклою вгору.

Оскільки числа  $a, b, c$ , сума яких дорівнює 1, — додатні, то  $a, b, c \in (0; 1)$ .

Тоді, за нерівністю Єнсена для опуклої вгору на проміжку  $(0; 1)$  функції  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

маємо:  $\frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 3} \geq \frac{\frac{1}{a^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 3}}{3}$ , звідки

$$\frac{1}{a^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 3} \leq \frac{3}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 3} = \frac{3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3} = \frac{27}{28}.$$

**Висновок.** Розташування графіка відносно його хорд є важливою властивістю опуклих униз (угору) функцій. Зокрема, з нього випливає нерівність Єнсена — потужний інструмент для доведення нерівностей із декількома змінними.

## Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася .....
- .....
- .....
- 2) Мені найбільше запам'яталося .....
- .....
- .....

- 3) Для мене було найцікавішим . . . . .  
.....  
.....
- 4) Для мене було найскладнішим . . . . .  
.....  
.....
- 5) Я припустився/припустилася помилки . . . . .  
.....  
.....
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти . . . . .  
.....  
.....
- 7) Поради собі до наступного уроку . . . . .  
.....  
.....

### **Можливі теми проєктів**

- 1.** Узагальнення нерівності Єнсена та її застосування.
- 2.** Доведення нерівності Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним декількох чисел з використанням доведення нерівності Єнсена.
- 3.** Нерівність Карамати, її доведення та застосування.
- 4.** Застосування нерівності Єнсена в олімпіадних задачах.

