

Урок 18. Нерівність Єнсена

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Доведення нерівності Єнсена.
2. Застосування нерівності Єнсена.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 3) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади.
- 4) Основним елементом уроку є ознайомлення учнів з алгебричними та геометричними властивостями опуклої вниз (вгору) функції та нерівністю Єнсена для таких функцій.
- 5) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 6) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

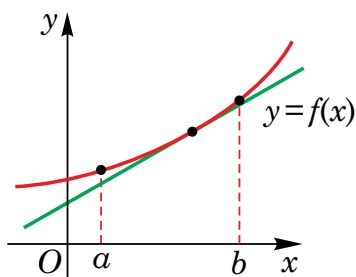
I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

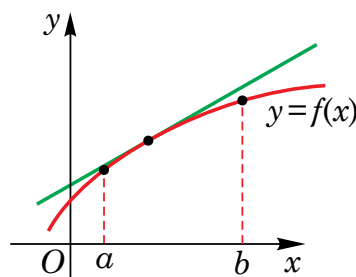
- 1) Як визначити, по який бік від дотичної лежить графік двічі диференційованої функції?
- 2) Як визначити, по який бік від хорди, що з'єднує дві точки графіка двічі диференційованої функції, лежить відповідна частина цього графіка?
- 3) У чому полягає зміст нерівності Єнсена для функції, опуклої вниз або опуклої вгору?
- 4) Наведіть приклади функцій, опуклих униз (угору) на множині дійсних чисел. Які нерівності можна отримати, застосувавши до даних функцій нерівність Єнсена?
- 5) Яка загальна ідея застосування нерівності Єнсена до опуклих униз (угору) функцій?

II. Графік опуклої функції та його хорди

Нехай функція $f(x)$ є диференційованою на проміжку I . Тоді для функцій, опуклих униз, графік лежить не нижче будь-якої дотичної, що проведена до графіка в точці цього проміжку. Для функцій, опуклих угору, графік лежить не вище будь-якої дотичної, що проведена до графіка в точці цього проміжку.



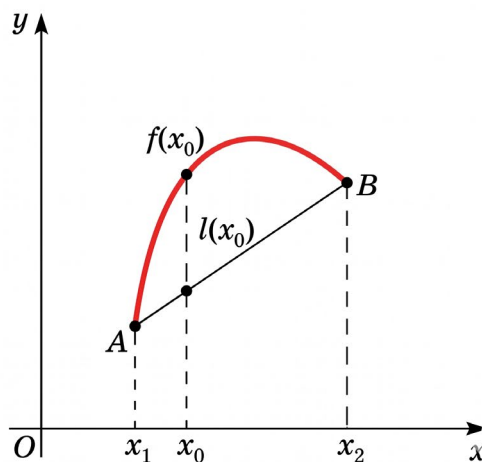
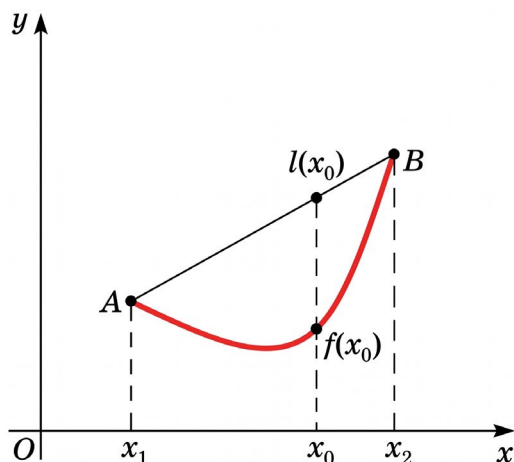
Функція, опукла вгору
на відрізку $[a; b]$



Функція, опукла вниз
на відрізку $[a; b]$

Розглянемо хорду графіка — відрізок, що сполучає дві точки цього графіка.

Для опуклих униз функцій відповідна частина графіка лежить під цією хордою, а для опуклих угору — над нею (див. рисунки).



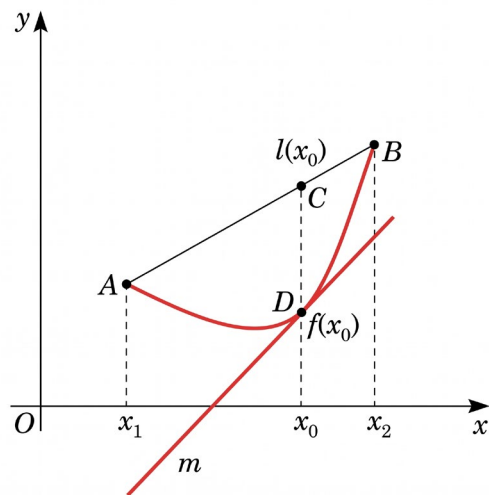
Інколи цю властивість обирають у якості означення функцій, опуклих вниз (угору). Для диференційовних опуклих функцій відповідний факт витікає з теорем, наведених нижче.

Теорема (властивість опуклої вниз функції). Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на проміжку I . Тоді для будь-яких точок $x_1 < x_2$ цього проміжку графік функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_1; x_2]$ лежить не вище хорди AB , де $A(x_1; f(x_1))$, $B(x_2; f(x_2))$.

Теорема (властивість опуклої вгору функції). Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на проміжку I . Тоді для будь-яких точок $x_1 < x_2$ цього проміжку графік функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_1; x_2]$ лежить не нижче хорди AB , де $A(x_1; f(x_1))$, $B(x_2; f(x_2))$.

Доведемо, наприклад, першу з цих двох теорем.

Розглянемо будь-яку точку x_0 між точками x_1 та x_2 , та дотичну m до графіка функції $y = f(x)$ у цій точці. Оскільки дана функція є опуклою вниз на проміжку I , то її графік на цьому проміжку, зокрема і на відрізку $[x_1; x_2]$, лежить не нижче m . Таким чином, точки $A(x_1; f(x_1))$, $B(x_2; f(x_2))$ лежать не нижче від проведеної дотичної. Тоді й будь-яка точка відрізка AB лежить не нижче від m . Зокрема, якщо на даному відрізку розглянути точку $l(x_0; l(x_0))$, то вона буде розташована не нижче від точки графіка $D(x_0; f(x_0))$. Оскільки така властивість справджується для будь-якої точки $x_0 \in [x_1; x_2]$, то графік функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_1; x_2]$ лежить не нижче хорди AB , що й потрібно було довести.



Для подальшого дослідження нам стане у нагоді наслідок розглянутих теорем для випадку, коли розглядається середина деякої хорди графіка опуклої функції.

Наслідок (властивість опуклої функції). Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою на проміжку I . Тоді для будь-яких точок x_1, x_2 цього проміжку справджується нерівність:

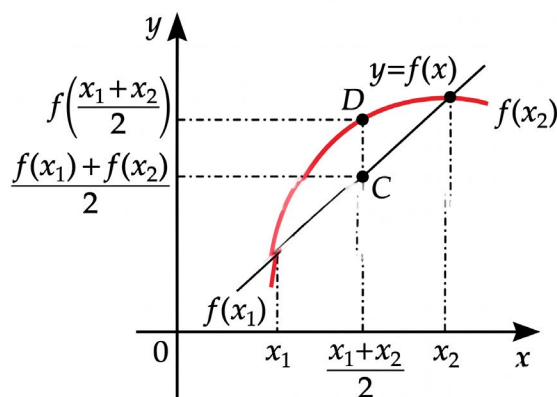
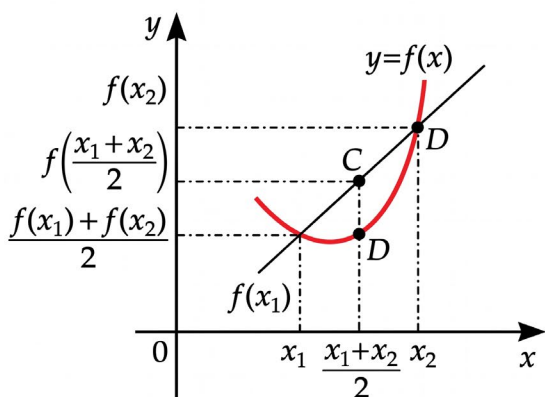
- $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ для випадку функції, опуклої вниз;
- $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ для випадку функції, опуклої вгору.

Доведення. Розглянемо $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ — середину відрізка $[x_1; x_2]$ при $x_1 \leq x_2$, або ж середину відрізка $[x_2; x_1]$ при $x_1 > x_2$. Тоді середина C хорди AB , де $A(x_1; f(x_1))$, $B(x_2; f(x_2))$,

має координати $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$, а відповідна точка D графіка має координати $D\left(\frac{x_1+x_2}{2}; f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$.

Для опуклої вниз функції C лежить не нижче D , тому $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Для опуклої вгору функції C лежить не вище D , тому $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.



III. Доведення нерівності Єнсена

Важливим узагальненням отриманих властивостей є теорема Єнсена.

Теорема (нерівність Єнсена). Нехай функція $y=f(x)$ є опуклою на проміжку I . Тоді для будь-яких точок $x_1, x_2, \dots, x_n$ цього проміжку справджується нерівність:

- $f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}$ для випадку функції, опуклої вниз;
- $f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}$ для випадку функції, опуклої вгору.

Доведемо, наприклад, нерівність Єнсена для функції $y=f(x)$, опуклої вниз на проміжку I .

Для доведення використаємо метод математичної індукції.

1. Спочатку доведемо, що нерівність Єнсена справджується для випадку $n=2^k$.

База індукції, при $k=1$.

$n=2^1=2$, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ — нерівність справджується за доведеною властивістю опуклої вниз функції.

Індукційний перехід. Нехай розглядувана нерівність справджується при $n = 2^k$, тоді доведемо, що вона справджується і при $n = 2^{k+1}$.

Очевидно, що кожне з чисел $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \dots, \frac{x_{2^{k+1}-1} + x_{2^{k+1}}}{2}$ належить проміжку I , а кількість цих чисел дорівнює $2^{k+1} : 2 = 2^k$. Скористаємося припущенням індукції та базою:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) &= f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \dots + \frac{x_{2^{k+1}-1} + x_{2^{k+1}}}{2}}{2^k}\right) \leq \\ &\leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{2^{k+1}-1} + x_{2^{k+1}}}{2}\right)}{2^k} \leq \\ &\leq \frac{\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \dots + \frac{f(x_{2^{k+1}-1}) + f(x_{2^{k+1}})}{2}}{2^k} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Згідно з принципом математичної індукції, нерівність Єнсена у даному випадку доведено.

2. Доведемо тепер, що нерівність Єнсена справджується для випадку $n \neq 2^k$.

Оскільки будь-яке натуральне число, що не є степенем числа 2, можна обмежити нерівністю $2^p < n < 2^{p+1}$, то достатньо довести твердження, що з правильності нерівності Єнсена для m чисел випливає її правильність для $m - 1$ числа.

Розглянемо допоміжне твердження.

Лема (властивість середнього арифметичного). Нехай $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ лежать на проміжку I , а їхнє середнє арифметичне дорівнює $A_{m-1} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}}{m-1}$.

Тоді:

- A_{m-1} належить проміжку I ;
- середнє арифметичне чисел $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, A_{m-1}$ дорівнює A_{m-1} .

Доведення. Нехай, для визначеності, $a \leq x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \leq b$.

Тоді $(m-1)a \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} \leq (m-1)b$, звідки $a \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}}{m-1} \leq b$, тобто A_{m-1}

належить проміжку I .

Розглянемо середнє арифметичне чисел $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, A_{m-1}$:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} + A_{m-1}}{m} = \frac{(m-1)A_{m-1} + A_{m-1}}{m} = \frac{mA_{m-1}}{m} = A_{m-1}.$$

Лему доведено.

Застосуємо щойно доведену лему для доведення твердження.

Нехай нерівність Єнсена справджується для будь-яких m чисел із проміжку I , тоді вона справджується для будь-яких $m - 1$ чисел з цього проміжку.

Нехай числа $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ лежать на проміжку I , тоді й A_{m-1} , за лемою, лежить на ньому.

За лемою та нерівністю Єнсена для m чисел маємо:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}}{m-1}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} + A_{m-1}}{m}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1}) + f(A_{m-1})}{m};$$

$$f(A_{m-1}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})}{m} + \frac{f(A_{m-1})}{m};$$

$$\frac{m-1}{m} f(A_{m-1}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})}{m};$$

$$f(A_{m-1}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})}{m-1};$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}}{m-1}\right) \leq f\left(\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})}{m-1}\right), \text{ що й потрібно було довести.}$$

IV. Застосування нерівності Єнсена

Ілюстративні приклади

- 1.** Доведіть нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним декількох чисел: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = x^2$ та її першу й другу похідні: $f'(x) = 2x$; $f''(x) = 2 > 0$.

Отже, функція $f(x) = x^2$ є опуклою вниз, за ознакою на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

За нерівністю Єнсена отримуємо:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}.$$

Звідси $\left|\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$, а тому й

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

- 2.** Для додатних чисел a, b, c , сума яких дорівнює 1, доведіть нерівність:

$$\frac{1}{a^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 3} \leq \frac{27}{28}.$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ на проміжку $(0; 1)$ та її першу й дру-

гу похідні: $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 3}\right)' = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}$,

$$f''(x) = \left(\frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}\right)' = \frac{-2(x^2 + 3)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^4} = \frac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}.$$

Якщо $x \in (0; 1)$, то $f''(x) < 0$, і функція $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ є опуклою вгору.

Оскільки числа a, b, c , сума яких дорівнює 1, — додатні, то $a, b, c \in (0; 1)$.

Тоді, за нерівністю Єнсена для опуклої вгору на проміжку $(0; 1)$ функції $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

$$\text{маємо: } \frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 3} \geq \frac{\frac{1}{a^2+3} + \frac{1}{b^2+3} + \frac{1}{c^2+3}}{3}, \text{ звідки}$$

$$\frac{1}{a^2+3} + \frac{1}{b^2+3} + \frac{1}{c^2+3} \leq \frac{3}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 3} = \frac{3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3} = \frac{27}{28}.$$

Висновок. Розташування графіка відносно його хорд є важливою властивістю опуклих униз (угору) функцій. Зокрема, з нього випливає нерівність Єнсена — потужний інструмент для доведення нерівностей із декількома змінними.

V. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

1. Узагальнення нерівності Єнсена та її застосування.

2. Доведення нерівності Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним декількох чисел з використанням доведення нерівності Єнсена.
3. Нерівність Карамати, її доведення та застосування.
4. Застосування нерівності Єнсена в олімпіадних задачах.