

Урок 19. Урок–практикум. Застосування нерівності Єнсена

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

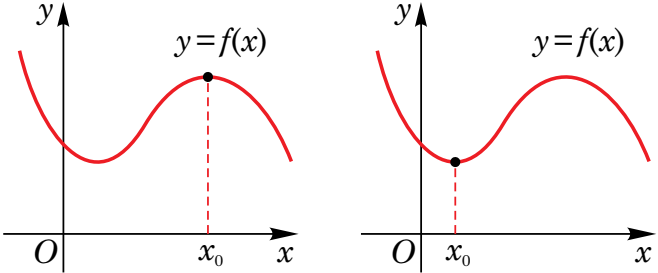
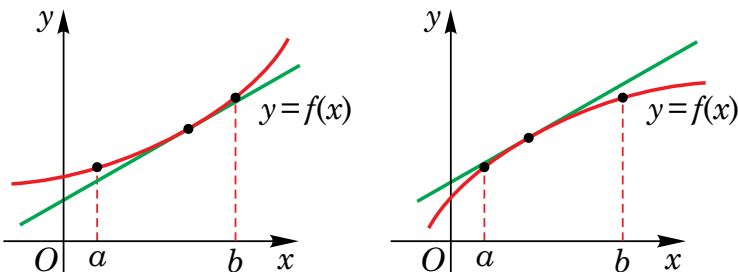
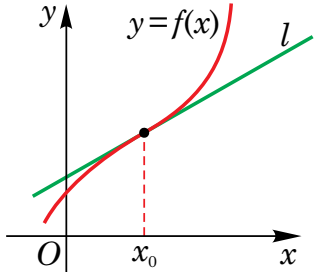
На уроці ви:

- 1) повторите властивості першої та другої похідної функції;
- 2) удосконалите навички підрахунку та застосування другої похідної для дослідження опуклості функцій;
- 3) набудете вміння по застосуванню нерівності Єнсена;
- 4) удосконалите навички застосування нерівності Єнсена на прикладах, пов'язаних з властивостями тригонометричних функцій від кутів трикутника.

II. Математичний диктант. Геометричні властивості графіка функції, дотичних до нього та його хорд

Завдання для диктанту

№	Формулювання завдання	Відповідь
1.	Сформулюйте геометричний зміст похідної функції в точці. Зробіть відповідний рисунок.	Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x_0 . Тоді $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка $f(x)$ в цій точці до додатного напрямку осі абсцис.
2.	Сформулюйте достатні умови зростання (спадання) диференційованої функції на інтервалі.	Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на ньому є зростаючою (спадною).
3.	Дослідіть функцію $y = 2x^3 - 3x^2$ на монотонність.	$y \uparrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ $y \downarrow x \in [-1; 1]$

№	Формулювання завдання	Відповідь
4.	Сформулюйте означення точки локального максимуму (мінімуму). Зробіть відповідні рисунки.	x_0 — точка локального максимуму (мінімуму) функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).  Точка максимуму: $x_{\max} = x_0$ Точка мінімуму: $x_{\min} = x_0$
5.	Сформулюйте для диференційованої функції означення опуклості вгору (вниз) на деякому проміжку. Зробіть відповідні рисунки.	Диференційована функція є опуклою вниз (угору) на проміжку I, якщо на ньому графік цієї функції розташований не нижче (не вище) дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку. 
6.	Сформулюйте геометричний зміст другої похідної функції.	Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I, причому $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вниз (угору) на проміжку I.
7.	Сформулюйте означення точки перегину для диференційованої функції. Зробіть рисунок.	Точка x_0 називається точкою перегину функції $y = f(x)$, якщо дотична до графіка у точці $(x_0; f(x_0))$ переходить з одного боку дотичної на інший (це означає, що у точці перегину напрям опуклості функції змінюється). 
8.	Дослідіть функцію $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 12$ на опуклість та точки перегину.	Функція опукла вниз при $x \in (-\infty; 2]; [3; +\infty)$; Функція опукла вгору при $x \in [2; 3]$.

№	Формулювання завдання	Відповідь
9.	Сформулюйте властивість хорд графіків опуклої вниз (угору) функції.	Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою вниз (угору) на проміжку I . Тоді для будь-яких точок $x_1 < x_2$ цього проміжку графік функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_1; x_2]$ лежить не вище (не нижче) хорди AB , де $A(x_1; f(x_1)), B(x_2; f(x_2))$.
10.	Сформулюйте нерівність Єнсена для опуклої вниз (угору) функції.	Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою на проміжку I . Тоді для будь-яких точок $x_1, x_2, \dots, x_n$ цього проміжку справджується нерівність: $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$ для випадку функції, опуклої вниз; $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$ для випадку функції, опуклої вгору.

II. Робота в парах. Доведення нерівностей за нерівністю Єнсена

Схема застосування нерівності Єнсена	
Етапи доведення	Приклад. Для додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ доведіть нерівність між середнім гармонічним та середнім арифметичним: $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$
1. Розгляньте функцію, пов'язану з умовою задачі.	$f(x) = \frac{1}{x}.$
2. Дослідіть дану функцію на опуклість.	
3. Оберіть інтервал, на якому дана функція буде опуклою вгору (вниз).	
4. Оберіть аргументи функції з цього інтервалу, пов'язані з умовою задачі.	
5. Застосуйте до обраної функції та аргументів нерівність Єнсена для функції, опуклої вниз (угору).	
6. Спростіть отриману нерівність, зробіть висновки.	

Задачі для роботи в парах

1. Доведіть, що нерівність: $\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{n} \leq \sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ справджується для будь-яких $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0; \pi]$.

2. Нехай $a, b, c, d > 0$. Доведіть, що:

$$\frac{12}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} \leq \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{d}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{d}} + \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{d}}.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ та її першу й другу похідну на проміжку $(0; +\infty)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \dots\dots\dots$$

$$f''(x) = \dots\dots\dots$$

При всіх $x \in (0; +\infty)$ маємо нерівність: $f''(x) \dots 0$, тож функція $f(x) = \frac{1}{x}$ є опуклою
 на цьому проміжку.

Розглянемо числа з цього проміжку: $x_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$,

Застосуємо нерівність Єнсена для опуклої
 функції $f(x) = \frac{1}{x}$ та чисел $x_1, x_2, \dots, x_6$, отримуємо:

.....

Домножимо отриману нерівність на 6:

.....

3. Доведіть, що для будь-яких трьох додатних чисел x, y, z , сума квадратів яких дорівнює 1, справджується нерівність: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Указівка. Розгляньте функцію $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ на проміжку $(0; 1)$.

III. Робота в малих групах. Застосування нерівності Єнсена для кутів трикутника.

Завдання для роботи в малих групах

4. Доведіть, що сума синусів кутів трикутника не перевищує $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

5. Для кутів довільного трикутника α, β, γ доведіть нерівність: $\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. Нехай α, β, γ є кутами довільного трикутника. Доведіть нерівність:

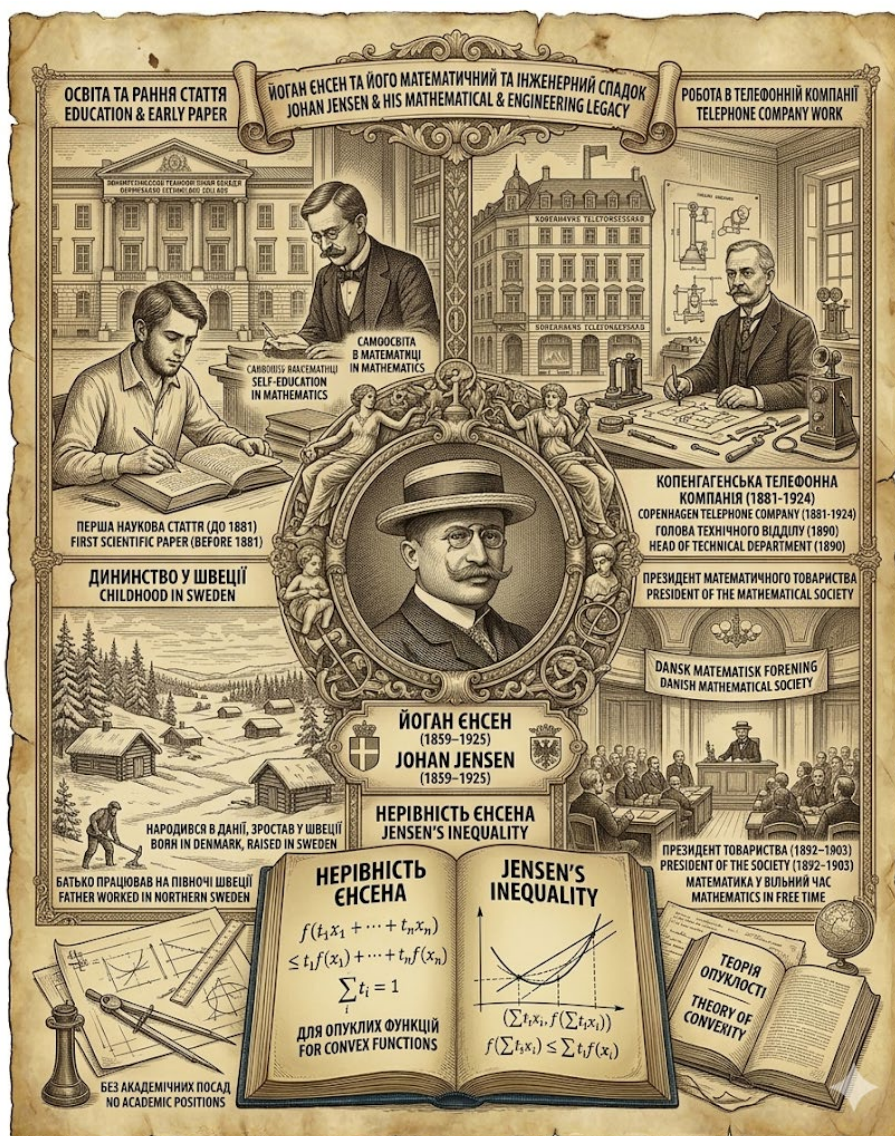
$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \geq 12.$$

Вказівка. Розгляньте функцію $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ на проміжку $(0; \pi)$ та скористайтесь нерівністю Єнсена і формулою суми кутів трикутника.

Історичні відомості

Йоган Віллем Людвіг Вальдемар Єнсен (1859 – 1925 рр.) — данський математик та інженер; президент Данського математичного товариства з 1892 по 1903 роки. Найбільш відомий завдяки доведеній ним нерівності, названій на його честь.

Народився в Данії, але провів більшу частину дитинства на півночі Швеції, де працював його батько. Потім сім'я повернулася до Данії, і в 1876 році Єнсен вступив до Копенгагенського технологічного коледжу. Першу наукову статтю він написав ще під час навчання, проте у коледжі викладалася математика лише на базовому рівні, і юнак здебільшого займався самоосвітою. З 1881 р. по 1924 р. Йоган працював у Копенгагенській телефонній компанії, в 1890 році отримав посаду голови технічного відділу. Єнсен ніколи не мав академічних посад, а математикою займався у вільний час.



Висновок. За допомогою другої похідної зручно досліджувати функцію на опуклість. У випадку двічі диференційованої опуклої на інтервалі функції можна доводити нерівності з декількома змінними, використовуючи нерівність Єнсена.

IV. Завдання для самостійного опрацювання

- Дано числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Доведіть нерівність:

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n}{n} \leq \cos \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$
- Для невід'ємних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ та натуральних параметрів n, k обґрунтуйте нерівність між середнім арифметичним та середнім степеневим:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}}.$$
- Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$. Доведіть, що $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_n + 1} \geq \frac{n}{2}$.
- Доведіть, що сума синусів кутів трикутника не перевищує $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- Для кутів довільного трикутника α, β, γ доведіть нерівність: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$.
- Для кутів довільного трикутника α, β, γ доведіть нерівність:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt{3}.$$
- Нехай α, β, γ є кутами довільного трикутника. Доведіть нерівність:

$$\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{2}} \geq 2\sqrt{3}.$$
- Нехай α, β, γ є кутами довільного трикутника. Доведіть нерівність:

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq 6.$$
- Нехай α, β, γ є кутами гострокутного трикутника. Доведіть нерівність:

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} + \frac{1}{\cos \gamma} \geq 6.$$
- Доведіть, що сума косинусів кутів гострокутного трикутника не перевищує $\frac{3}{2}$. Чи справджується дана нерівність для прямокутного трикутника? Тупокутного трикутника?

Рефлексія

- 1.** Я знаю властивості розміщення графіка опуклої вниз (угору) функції відносно дотичної.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- 2.** Я знаю властивості розміщення графіка опуклої вниз (угору) функції відносно хорди.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- 3.** Я вмію застосовувати другу похідну для дослідження опуклості функції.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- 4.** Я знаю формулювання нерівності Єнсена для опуклої вниз (угору) функції.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- 5.** Я розумію ідею застосування нерівності Єнсена.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- 6.** Я вмію застосовувати нерівність Єнсена для доведення інших нерівностей з декількома змінними.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----

