

Урок 2. Урок–практикум. Застосування теорем Ферма, Ролля, Лагранжа

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) застосовувати екстремуми функції та теорему Ферма;
- 2) застосовувати теореми Ролля і Лагранжа;
- 3) доводити нерівності за допомогою теореми Лагранжа;
- 4) досліджувати кількість коренів рівняння із застосуванням похідної.

II. Повторення

1. Знайдіть $f'(1)$, якщо $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$.

А	Б	В	Г	Д
3,5	4,5	5	5,5	6,5

2. Обчисліть похідну функції $y(x) = \cos 3 + \frac{1}{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sin 3 + \frac{1}{5}$	$-\sin 3 + \frac{1}{5}$	$-\sin 3 - \frac{1}{25}$	0	$-\sin 3$

3. Укажіть похідну функції $y(x) = x \cos x$.

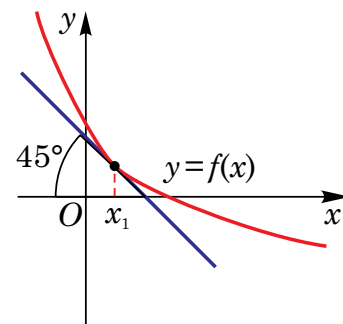
А	Б	В	Г	Д
$-x \sin x$	$-\sin x$	$-\sin x + \cos x$	$1 - \sin x$	$-x \sin x + \cos x$

4. Знайдіть суму коренів рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0,5x^2 - 4x + 9$.

А	Б	В	Г	Д
-1	0	1	2	3

5. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0 . Знайдіть значення $f'(x_0)$.

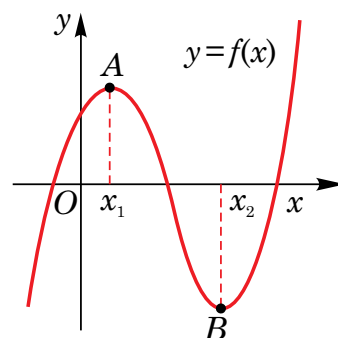
А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	2



III. Робота в парах над застосуванням теореми Ферма

Означення. x_1 — **точка максимуму** функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого інтервалу $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.

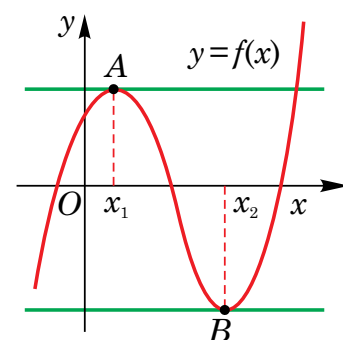
Означення. x_2 — **точка мінімуму** функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого інтервалу $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.



Теорема Ферма. Необхідна умова існування екстремуму. Якщо x_0 — точка екстремуму функції та існує $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Дана теорема означає, що в точці екстремуму диференційовної функції дотична до графіка є паралельною осі абсцис, або збігається з нею.

Зауваження. Умова $f'(x_0) = 0$ є лише необхідною для точок екстремуму диференційованої функції, але не достатньою. Наприклад, для функції $y = x^3$ похідна при $x_0 = 0$ дорівнює 0, але дана точка не є ні точкою мінімуму, ні точкою максимуму. Натомість дотична в ній збігається з віссю абсцис.



Завдання для роботи в парах

6. Відомо, що функція $f(x)$ набуває в точці x_0 найбільшого або найменшого значень. Перевірте рівність $f'(x_0) = 0$, якщо:

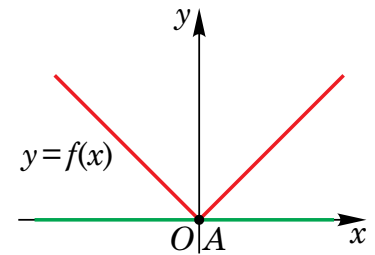
1) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 2025$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \cos x - (x - 2\pi)^2$, $x_0 = 2\pi$.

7. Використовуючи теорему Ферма, доведіть, що функція $f(x)$ не набуває в точці x_0 ані найбільшого, ані найменшого значення, якщо:

$$1) f(x) = x^6 + x + 11, x_0 = -1; \quad 2) f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} + 3x + 12, x_0 = -0,5.$$

8. Знайдіть помилку у наступному «доведенні» властивості модуля.

Розглянемо функцію $f(x) = |x|$. Оскільки при будь-якому значенні змінної x ця функція набуває невід'ємних значень, а при $x_0 = 0$ функція перетворюється в нуль, то $\min f(x) = f(0) = 0$. Таким чином, у точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = |x|$ набуває найменшого значення. Тому $x_0 = 0$ є точкою мінімуму цієї функції, і, зокрема, точкою екстремуму. Тоді, за теоремою Ферма, $f'(x_0) = 0$. Отже, $(|x|)' = 0$. Зокрема, з цього випливає, що дотична до графіка функції $f(x) = |x|$ у точці $(0; 0)$ збігається з віссю Ox (див. рисунок).



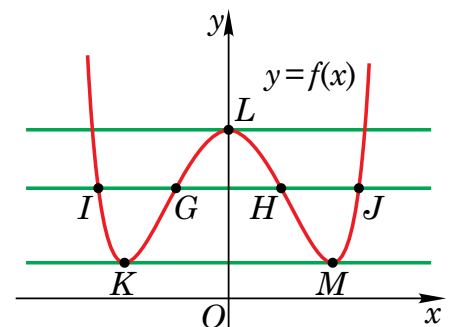
IV. Робота в малих групах над застосуванням теорем Ролля та Лагранжа

Теорема Ферма показує умову, яка виконується для точок екстремуму диференційовної функції: $f'(x_0) = 0$. А ось достатню умову виконання рівності $f'(x_0) = 0$ для деякої точки x_0 маємо з теореми Ролля.

Теорема Ролля. Достатня умова наявності нулів похідної на проміжку. Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, диференційовною у будь-якій точці інтервалу $(a; b)$ і при цьому $f(a) = f(b)$. Тоді на інтервалі $(a; b)$ існує точка x_0 , для якої $f'(x_0) = 0$.

Дана теорема означає, що для «гладкої» функції між двома аргументами з однаковим значенням функції існує точка, в якій дотична до графіка є паралельною осі абсцис, або збігається з нею (див. рисунок).

Так, на рисунку між точками графіка I, G із однаковими ординатами міститься точка K , дотична до графіка в якій паралельна осі абсцис. Аналогічно між точками G, H з однаковими ординатами міститься точка L , в якій дотична до графіка паралельна осі абсцис. Аналогічна ситуація і з точкою M між точками H, J .



Механічний зміст теореми Ролля

Якщо деяке тіло рухалося уздовж прямої, а в початковий і кінцевий моменти часу знаходилося в одній точці, то хоча б в один момент часу між ними його швидкість дорівнювала нулю (у найпростішому випадку воно рухалося в одному напрямку, потім зупинилося і стало рухатися у протилежному).

Теорема Лагранжа. Формула скінченних приростів. Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, диференційована у будь-якій точці інтервалу $(a; b)$. Тоді на інтервалі $(a; b)$ існує точка x_0 , для якої

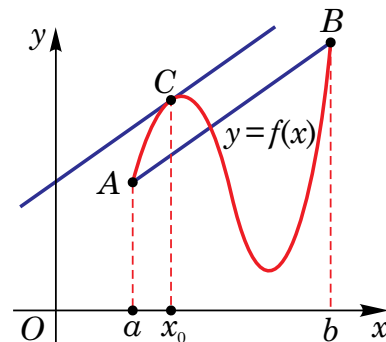
$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Інші форми запису висновку з теореми Лагранжа

1. $f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a)$.
2. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \Theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$, $\Theta \in (0; 1)$ (формула скінченних приростів).

Дана теорема означає, що для «гладкої» функції, заданої на відрізку, існує точка, в якій дотична до графіка є паралельною до відрізка, що з'єднує «кінцеві точки» графіка, або містить цей відрізок.

На рисунку між точками графіка A, B міститься точка C , дотична до графіка в якій паралельна відрізку AB .



Механічний зміст теореми Лагранжа

Якщо деяке тіло рухалося уздовж прямої, то хоча б в один момент часу між початком та кінцем руху його миттєва швидкість дорівнювала середній швидкості упродовж даного руху.

Це легко випливає з теореми Лагранжа з урахуванням механічного змісту похідної. Дійсно, нехай: $f(t)$ — відстань (координата) тіла при русі уздовж осі Ox у момент часу t , тоді $f'(t_0) = v(t_0)$, а середня швидкість протягом проміжку часу від $t = a$ до $t = b$ дорівнює зміні відстані, поділеній на витрачений час: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

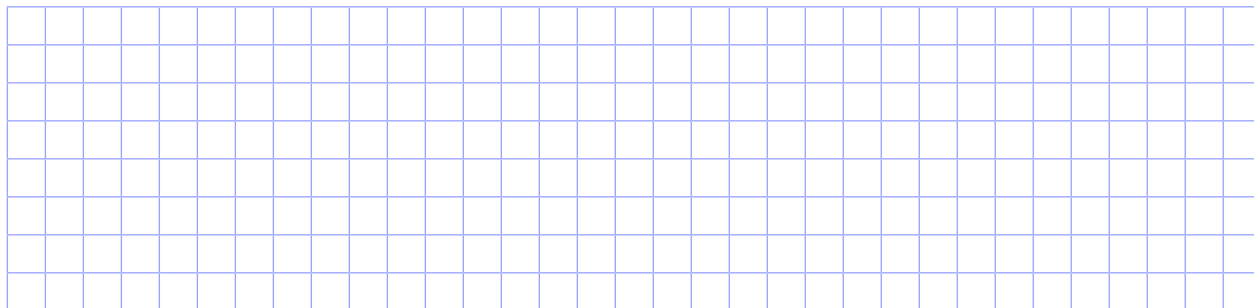
Завдання для роботи в малих групах

9. Зобразіть приклад графіка функції $y = f(x)$, заданої на відрізку $[-1; 1]$, причому $f(-1) = f(1)$ і для якої на інтервалі $(-1; 1)$ похідна: 1) має 1 нуль; 2) має 2 нулі; 3) не має жодного нуля. Порівняйте отримані результати із формулюванням теореми Ролля та зробіть висновки.
10. Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[-1; 1]$, диференційовна у будь-якій точці інтервалу $(-1; 1)$, причому $f'(x) \neq 1$ на цьому інтервалі. Доведіть, за допомогою теореми Лагранжа, що $f(1) \neq f(-1) + 2$.
11. Нехай деяке тіло рухалося уздовж прямої від моменту початку руху $t_1 = 0$ с до моменту закінчення руху $t_2 = 10$ с, причому за цей час тіло віддалилося від початкового положення на 50 м. Чи може миттєва швидкість у будь-який момент часу упродовж 10 с описаного руху бути меншою від 4,5 м/с?

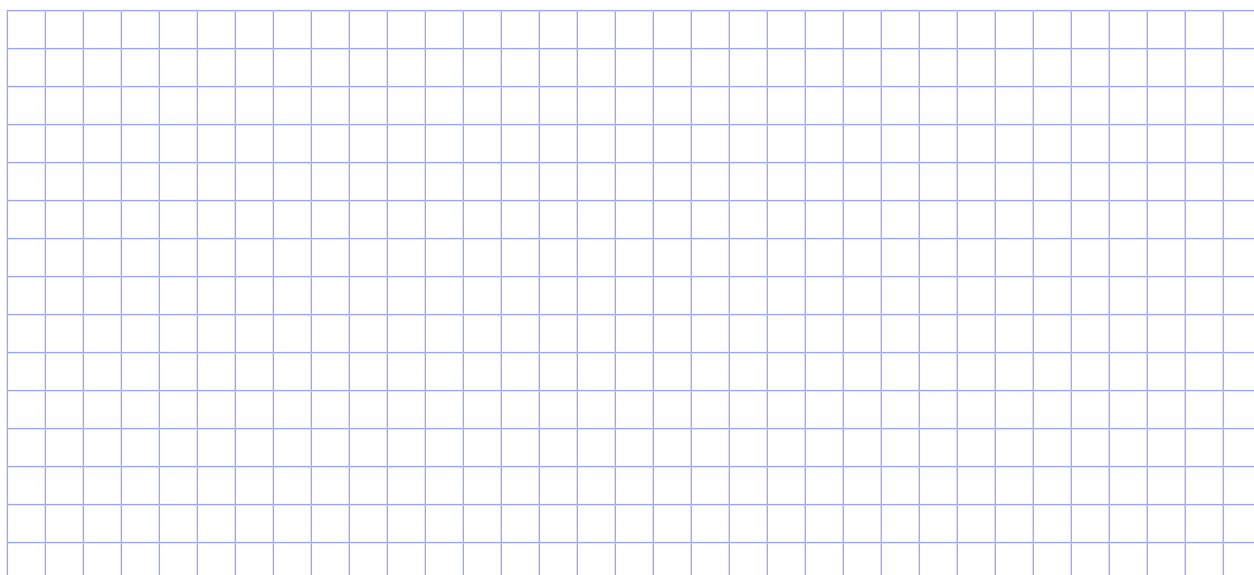
V. Доведення нерівностей за теоремою Лагранжа

Завдання для розв'язання методом «мозкового штурму».

- 12.** Доведіть числову нерівність $\cos \frac{1}{3} - \cos \frac{1}{2} < 0,1$.



- 13.** Доведіть нерівність $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}, n \geq 2$.



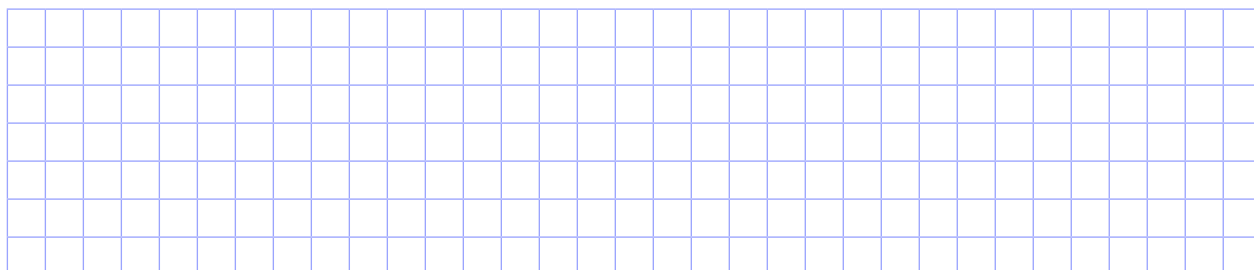
VI. Доведення тверджень про кількість коренів рівняння

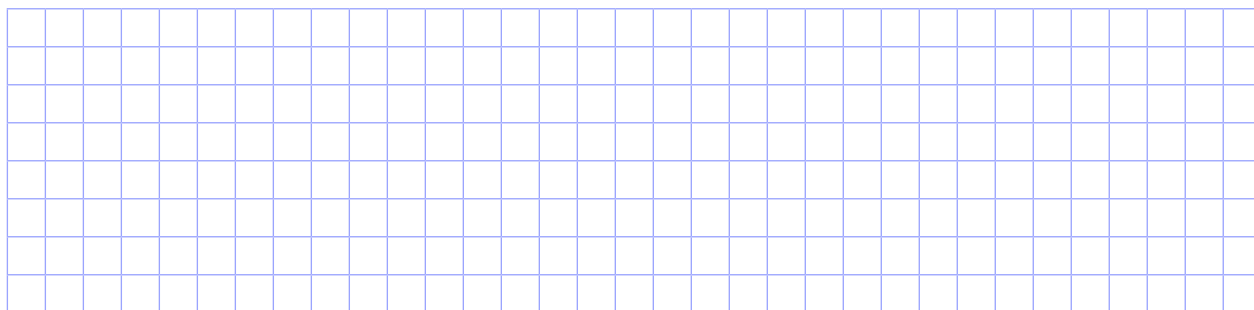
Теорема про наявність нулів похідної

Між двома нулями диференційовної функції лежить принаймні один нуль її похідної.

Зокрема, якщо диференційовна функція має n нулів, то її похідна має не менш як $n - 1$ нулів.

- 14.** Відомо, що рівняння $x^4 + ax^3 + bx^2 + c = 0$ має чотири різні дійсні корені. Доведіть, що $9a^2 > 32b$.





VII. Розв'язання практичної задачі

Задача. Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$, є паралельною прямою $y = 1,5x + 5$. Знайдіть значення похідної функції $g(x) = \frac{18}{x} - f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

VIII. Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....







