

Тема 3.

Застосування похідної

Урок 2. Урок–практикум. Застосування теорем Ферма, Ролля, Лагранжа

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Робота в парах над застосуванням теореми Ферма.
2. Робота в малих групах над застосуванням теорем Ролля та Лагранжа.
3. Доведення нерівностей за теоремою Лагранжа.
4. Доведення тверджень про кількість коренів рівняння.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку організуйте, за необхідності, повторення.
- 2) Сформулюйте задачу із ЗНО/НМТ. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Об'єднайте учнів/учениць у пари і запропонуйте їм серією завдань. Учитель виступає у ролі консультанта та порадирика. Важливим елементом роботи є набуття навичок самоперевірки та взаємоперевірки.
- 4) Об'єднайте учнівство у кілька груп (4 – 6 груп). Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті на різних уроках знання.

- 5) Один або декілька учнів/учениць можуть допомагати вчителю виконувати роль радника та консультанта.
- 6) Завдання деяких етапів зазвичай є складними для учнів/учениць. Тому доцільно розбирати їх разом, методом «мозкового штурму», під керівництвом вчителя.
- 7) Наприкінці уроку пропонуйте учням/ученицям розв'язати практичну задачу, сформульовану на початку уроку. Об'єднайте клас у кілька груп (4 – 6 груп). Упродовж розв'язування задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання проблем.
- 8) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язати завдання, запропоновані на різних етапах уроку.
- 9) Основна мета уроку — формування вмінь та навичок щодо використання класичних теорем математичного аналізу.
- 10) Додаткова мета уроку — повторення властивостей похідної.
- 11) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 12) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть $f'(1)$, якщо $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$.

А	Б	В	Г	Д
3,5	4,5	5	5,5	6,5

2. Обчисліть похідну функції $y(x) = \cos 3 + \frac{1}{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sin 3 + \frac{1}{5}$	$-\sin 3 + \frac{1}{5}$	$-\sin 3 - \frac{1}{25}$	0	$-\sin 3$

3. Укажіть похідну функції $y(x) = x \cos x$.

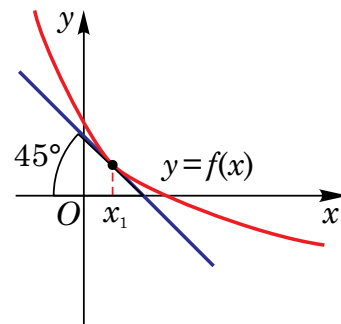
А	Б	В	Г	Д
$-x \sin x$	$-\sin x$	$-\sin x + \cos x$	$1 - \sin x$	$-x \sin x + \cos x$

4. Знайдіть суму коренів рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0,5x^2 - 4x + 9$.

А	Б	В	Г	Д
-1	0	1	2	3

5. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0 . Знайдіть значення $f'(x_0)$.

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	2



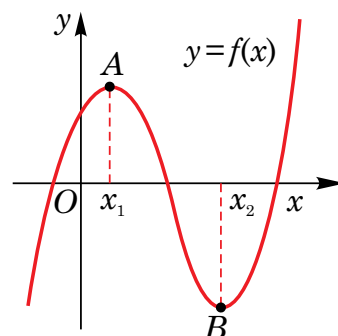
Як я вирішую певну проблему із ЗНО/НМТ 2025 року?

- Задача.** Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$, є паралельною прямій $y = 1,5x + 5$. Знайдіть значення похідної функції $g(x) = \frac{18}{x} - f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

III. Робота в парах над застосуванням теореми Ферма

Означення. x_1 — **точка максимуму** функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого інтервалу $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.

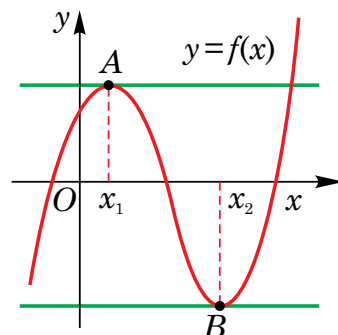
Означення. x_2 — **точка мінімуму** функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого інтервалу $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.



Теорема Ферма. Необхідна умова існування екстремуму. Якщо x_0 — точка екстремуму функції та існує $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Дана теорема означає, що в точці екстремуму диференційовної функції дотична до графіка є паралельною осі абсцис, або збігається з нею.

Зауваження. Умова $f'(x_0) = 0$ є лише необхідною для точок екстремуму диференційованої функції, але не достатньою. Наприклад, для функції $y = x^3$ похідна при $x_0 = 0$ дорівнює 0, але дана точка не є ні точкою мінімуму, ні точкою максимуму. Натомість дотична в ній збігається з віссю абсцис.



Завдання для роботи в парах

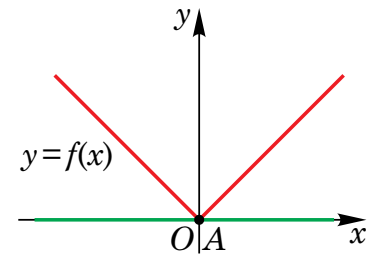
6. Відомо, що функція $f(x)$ набуває в точці x_0 найбільшого або найменшого значень. Перевірте рівність $f'(x_0) = 0$, якщо:
- 1) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 2025$, $x_0 = 0$;
 - 2) $f(x) = \cos x - (x - 2\pi)^2$, $x_0 = 2\pi$.

7. Використовуючи теорему Ферма, доведіть, що функція $f(x)$ не набуває в точці x_0 ані найбільшого, ані найменшого значення, якщо:

1) $f(x) = x^6 + x + 11, x_0 = -1$; 2) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} + 3x + 12, x_0 = -0,5$.

8. Знайдіть помилку у наступному «доведенні» властивості модуля.

Розглянемо функцію $f(x) = |x|$. Оскільки при будь-якому значенні змінної x ця функція набуває невід'ємних значень, а при $x_0 = 0$ функція перетворюється в нуль, то $\min f(x) = f(0) = 0$. Таким чином, у точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = |x|$ набуває найменшого значення. Тому $x_0 = 0$ є точкою мінімуму цієї функції, і, зокрема, точкою екстремуму. Тоді, за теоремою Ферма, $f'(x_0) = 0$. Отже, $(|x|)' = 0$. Зокрема, з цього випливає, що дотична до графіка функції $f(x) = |x|$ у точці $(0; 0)$ збігається з віссю Ox (див. рисунок).



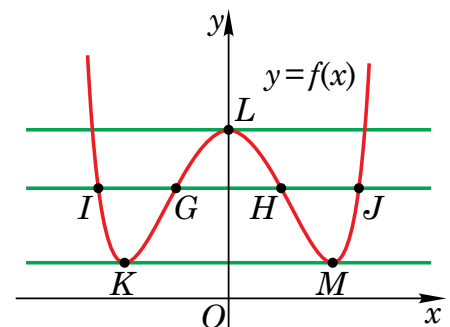
IV. Робота в малих групах над застосуванням теорем Ролля та Лагранжа

Теорема Ферма показує умову, яка виконується для точок екстремуму диференційовної функції: $f'(x_0) = 0$. А ось достатню умову виконання рівності $f'(x_0) = 0$ для деякої точки x_0 маємо з теореми Ролля.

Теорема Ролля. Достатня умова наявності нулів похідної на проміжку. Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, диференційовною у будь-якій точці інтервалу $(a; b)$ і при цьому $f(a) = f(b)$. Тоді на інтервалі $(a; b)$ існує точка x_0 , для якої $f'(x_0) = 0$.

Дана теорема означає, що для «гладкої» функції між двома аргументами з однаковим значенням функції існує точка, в якій дотична до графіка є паралельною осі абсцис, або збігається з нею (див. рисунок).

Так, на рисунку між точками графіка I, G із однаковими ординатами міститься точка K , дотична до графіка в якій паралельна осі абсцис. Аналогічно між точками G, H з однаковими ординатами міститься точка L , в якій дотична до графіка паралельна осі абсцис. Аналогічна ситуація і з точкою M між точками H, J .



Механічний зміст теореми Ролля

Якщо деяке тіло рухалося уздовж прямої, а в початковий і кінцевий моменти часу знаходилося в одній точці, то хоча б в один момент часу між ними його швидкість дорівнювала нулю (у найпростішому випадку воно рухалося в одному напрямку, потім зупинилося і стало рухатися у протилежному).

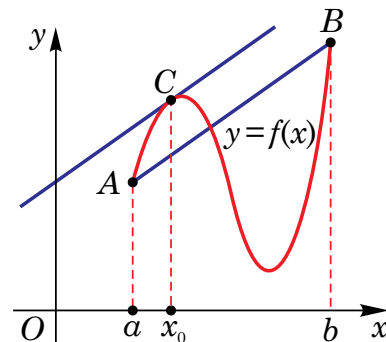
Теорема Лагранжа. Формула скінченних приростів. Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, диференційована у будь-якій точці інтервалу $(a; b)$. Тоді на інтервалі $(a; b)$ існує точка x_0 , для якої
$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Інші форми запису висновку з теореми Лагранжа

1. $f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a).$
2. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \Theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x, \Theta \in (0; 1)$ (формула скінченних приростів).

Дана теорема означає, що для «гладкої» функції, заданої на відрізку, існує точка, в якій дотична до графіка є паралельною до відрізка, що з'єднує «кінцеві точки» графіка, або містить цей відрізок.

На рисунку між точками графіка A, B міститься точка C , дотична до графіка в якій паралельна відрізку AB .



Механічний зміст теореми Лагранжа

Якщо деяке тіло рухалося уздовж прямої, то хоча б в один момент часу між початком та кінцем руху його миттєва швидкість дорівнювала середній швидкості упродовж даного руху.

Це легко випливає з теореми Лагранжа з урахуванням механічного змісту похідної. Дійсно, нехай: $f(t)$ — відстань (координата) тіла при русі уздовж осі Ox у момент часу t , тоді $f'(t_0) = v(t_0)$, а середня швидкість протягом проміжку часу від $t = a$ до $t = b$ дорівнює зміні відстані, поділеній на витрачений час:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Завдання для роботи в малих групах

9. Зобразіть приклад графіка функції $y = f(x)$, заданої на відрізку $[-1; 1]$, причому $f(-1) = f(1)$ і для якої на інтервалі $(-1; 1)$ похідна: 1) має 1 нуль; 2) має 2 нулі; 3) не має жодного нуля. Порівняйте отримані результати із формулюванням теореми Ролля та зробіть висновки.
10. Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[-1; 1]$, диференційовна у будь-якій точці інтервалу $(-1; 1)$, причому $f'(x) \neq 1$ на цьому інтервалі. Доведіть, за допомогою теореми Лагранжа, що $f(1) \neq f(-1) + 2$.
11. Нехай деяке тіло рухалося уздовж прямої від моменту початку руху $t_1 = 0$ с до моменту закінчення руху $t_2 = 10$ с, причому за цей час тіло віддалилося від початкового положення на 50 м. Чи може миттєва швидкість у будь-який момент часу упродовж 10 с описаного руху бути меншою від 4,5 м/с?

V. Доведення нерівностей за теоремою Лагранжа

Завдання для розв'язання методом «мозкового штурму».

- 12.** Доведіть числову нерівність $\cos \frac{1}{3} - \cos \frac{1}{2} < 0,1$.

Розв'язання. Застосуємо для функції $y = \cos x$ теорему Лагранжа на відрізку $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$.

Отримуємо: $\cos \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{3} = -\sin x_0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$, тобто $\cos \frac{1}{3} - \cos \frac{1}{2} = \sin x_0 \cdot \frac{1}{6}$.

Оскільки для будь-якого гострого кута x справджується нерівність $\sin x < x$, то:

$$\cos \frac{1}{3} - \cos \frac{1}{2} = \sin x_0 \cdot \frac{1}{6} < x_0 \cdot \frac{1}{6} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Звідси випливає, що $\cos \frac{1}{3} - \cos \frac{1}{2} < \frac{1}{12} < \frac{1}{10}$, тобто $\cos \frac{1}{3} - \cos \frac{1}{2} < 0,1$.

- 13.** Доведіть нерівність $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$, $n \geq 2$.

Розв'язання. Застосуємо для функції $y = \frac{1}{x}$ теорему Лагранжа на відрізках

$[1; 2], [2; 3], \dots, [n-1; n]$. Оскільки $y' = -\frac{1}{x^2}$, то:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{x_1^2} \cdot (2-1),$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x_2^2} \cdot (3-2),$$

...

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{x_{n-1}^2} \cdot (n - (n-1)).$$

Додаємо отримані рівності: $\frac{1}{n} - \frac{1}{1} = -\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}^2}\right)$,

$$\text{звідки } 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}^2}.$$

Оскільки, згідно теореми Лагранжа, $x_1 \in [1; 2]$, $x_2 \in [2; 3]$, ..., $x_n \in [n-1; n]$, то:

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}^2} > \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2}.$$

З цього випливає, що $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} < 2 - \frac{1}{n}$, що й треба було довести.

VI. Доведення тверджень про кількість коренів рівняння

Теорема про наявність нулів похідної

Між двома нулями диференційовної функції лежить принаймні один нуль її похідної.

Зокрема, якщо диференційовна функція має n нулів, то її похідна має не менш як $n - 1$ нулів.

- 14.** Відомо, що рівняння $x^4 + ax^3 + bx^2 + c = 0$ має чотири різні дійсні корені. Доведіть, що $9a^2 > 32b$.

Доведення. Оскільки функція $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ має чотири нулі, то її похідна — багаточлен третього степеня, — має три нулі. Отримуємо:

$y' = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx = x(4x^2 + 3ax + 2b)$ має три нулі, а тому квадратне рівняння $4x^2 + 3ax + 2b = 0$ має два корені, і його дискримінант є додатним: $D = 9a^2 - 32b > 0$, звідки й випливає задана нерівність.

- 15.** Нехай $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} = 0$. Доведіть, що рівняння $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ має принаймні один дійсний корінь.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^n}{n}$.

Оскільки $f(0) = f(1) = 0$, то існує $x_0 \in [0; 1]$, при якому

$$f'(x_0) = \left(a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^n}{n} \right)' (x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^{n-1} = 0.$$

Отже, рівняння $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ має дійсний корінь x_0 .

VII. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

- Задача.** Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$, є паралельною прямою $y = 1,5x + 5$. Знайдіть значення похідної функції $g(x) = \frac{18}{x} - f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Розв'язання. Згідно з геометричним змістом похідної, $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$. Оскільки дотична паралельна прямою $y = 1,5x + 5$, то цей кутовий коефіцієнт дорівнює 1,5. Тому $f'(x_0) = 1,5$.

Звідси $g'(x) = \left(\frac{18}{x} - f(x) \right)' = -\frac{18}{x^2} - f'(x)$ і, тому $g'(3) = -\frac{18}{3^2} - f'(3) = -2 - 1,5 = -3,5$.

Відповідь. $-3,5$.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....