

Урок 20. Приріст аргументу та приріст функції

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Узагальнення властивостей функції.
2. Схема дослідження властивостей функції.
3. Побудова графіків функцій із застосуванням похідної функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Теорію подавайте глибоко за змістом, але стисло за формою.
- 3) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 4) Основним елементом уроку є ознайомлення учнів зі схемою дослідження функції та побудови її графіка.
- 5) При побудові графіків функцій інколи (для наочності) доцільним буває провести дотичні у точках локального екстремума та/або у точках перегину. Натомість у деяких ситуаціях певні пункти дослідження варто пропустити через складність відповідного дослідження, ураховуючи обмеженість «шкільних» математичних методів.
- 6) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Що таке область визначення функції? Множина значень функції?
- 2) Які функції називають парними/непарними?
- 3) Які функції називають періодичними?
- 4) У яких випадках можна використовувати властивості періодичності функцій у практичних задачах?
- 5) Які властивості функції та її графіка можна дослідити з використанням границі функції в точці або на нескінченності?
- 6) Які властивості функції можна дослідити з використанням похідної?
- 7) Які властивості функції можна дослідити з використанням другої похідної?
- 8) Які властивості функції доцільно досліджувати, використовуючи алгебричні методи та/або математичного аналізу?

II. Узагальнення властивостей функції

Упродовж вивчення курсу алгебри і початків аналізу, ви знайомилися із різними властивостями, притаманними тим чи іншим функціям. Зрозуміло, що ці властивості можна вивчати як з аналітичної, так і з графічної точок зору. Згадаємо найголовніші з цих властивостей.

Властивості функцій

- 1. Область визначення.** Якщо $f(x) = \sqrt{x-1}$, то $D(f) = [0; +\infty)$.
- 2. Множина значень.** Для функції $f(x) = \sin x$, $E(f) = [-1; 1]$.
- 3. Парність/непарність.**
Нехай $f(x) = x^2 + |x|$, тоді $f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x)$.
Отже, функція $f(x)$ є парною, її графік симетричний відносно осі ординат.
Нехай $f(x) = x^3 + x$, тоді $f(-x) = -x^3 - x = -f(x)$.
Отже, функція $f(x)$ є непарною, її графік симетричний відносно початку координат.
- 4. Періодичність.** Якщо $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, то функція є періодичною з періодом $T = \pi$.
- 5. Нулі функції.** Для функції $f(x) = x^2 - 2x$, $f(x) = 0$, звідси $x \in \{0; 2\}$.
- 6. Проміжки знакосталості.** Якщо $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $f(x) = (x-2)(x-3)$, то $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2; 3)$.

7. Неперервність та точки розриву.

Якщо $f(x) = \frac{x}{x+2}$, то функція $f(x)$ є неперервною на множині $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, $x = -2$ — точка розриву.

8. Асимптоти (горизонтальні, вертикальні, похилі).

1) Для функції $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x+2} = \infty$, пряма $x = -2$ є вертикальною асимптотою.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{x}} = 1$, то пряма $y = 1$ є горизонтальною асимптотою.

2) Для функції $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x + \frac{1}{x} \right) = \infty$, тому пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) = 2 = k$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 = b$, то пряма $y = kx + b$, тобто $y = 2x$ є похилою асимптотою.

9. Монотонність та точки екстремуму.

Якщо $f(x) = x^3 - 3x$, то $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

Оскільки $f'(x) = 3(x-1)(x+1) \geq 0$, то функція $f(x)$ зростає при $x \in (-\infty; -1]; [1; +\infty)$.

Оскільки $f'(x) = 3(x-1)(x+1) \leq 0$, то функція $f(x)$ спадає при $x \in [-1; 1]$.

Тоді точки екстремуму: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 1$.

10. Проміжки опуклості та точки перегину.

Для функції $f(x) = \frac{x^3 + 4x - 1}{x}$ знайдемо похідну і другу похідну:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}; \quad f''(x) = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}.$$

Оскільки $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$, то функція $f(x)$ є опуклою вниз на проміжках $(-\infty; 0); [1; +\infty)$.

Оскільки $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1]$, то функція $f(x)$ є опуклою вгору на проміжку $(0; 1]$.

Тоді $x = 1$ — точка перегину графіка функції.

III. Схема дослідження властивостей функції

При комплексному дослідженні властивостей функції та побудові її графіка варто притримуватися наведеної нижче схеми. При цьому на практиці можуть трапитися випадки, коли деякі пункти неможливо виконати, використовуючи лише шкільний курс математики. Тоді доцільно такі пункти пропустити, а для дослідження функції й побудови її графіка використати всі інші.

Зауважимо, що наведений план дослідження має рекомендаційний характер і не є незмінним та вичерпним. Для побудови графіка функції упродовж дослідження важливо виявити такі властивості, що допоможуть коректно здійснити побудову.

Схема дослідження властивостей функції. Ілюстративний приклад

1. Проведіть дослідження та побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

Розв’язання. Пункти дослідження проведена в таблиці.

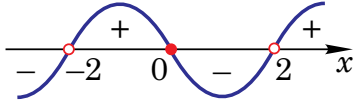
Схема дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	$D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	Область визначення симетрична відносно 0. Оскільки $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$, то функція $f(x)$ є непарною, її графік симетричний відносно початку координат. 
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	Оскільки $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, то точка перетину з осями координат: $(0; 0)$.
4. Проміжки знакосталості.	Для $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ крива знаків: Тоді $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.
5. Неперервність, точки розриву.	Функція неперервна на $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Точки розриву: -2 і 2 .

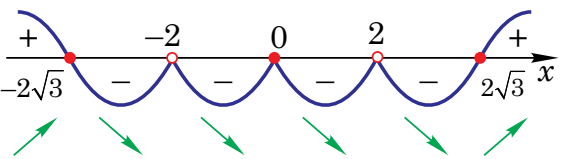
Схема дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Оскільки $\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$, то пряма $x = -2$ є вертикальною асимптотою графіка. Оскільки $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$, то графік функції не має горизонтальних асимптот. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} \right) = 1 = k$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{x^2 - 4} \right) = 0 = b$, то пряма $y = kx + b$, тобто $y = x$ є похилою асимптотою
3 використанням похідної	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	Для функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ похідна: $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 4) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2},$ $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{(x^2 - 4)^2}.$ Крива знаків для похідної:  Отже, $x_{\max} = -2\sqrt{3}$, $x_{\min} = 2\sqrt{3}$. Тоді $f_{\max} = -3\sqrt{3}$, $f_{\min} = 3\sqrt{3}$.

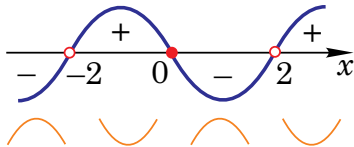
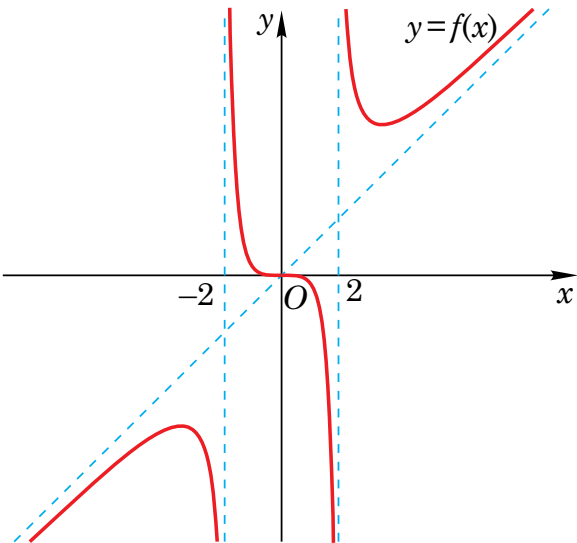
Схема дослідження властивостей функції																																																								
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.																																																							
З використанням другої похідної																																																								
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	Знайдемо другу похідну: $f''(x) = \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2 - 4)^2 - 4x \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{8x \cdot (x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}.$ Крива знаків для другої похідної:  Отже, $x = 0$ — точка перегину графіка функції.																																																							
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	<table><tr><th>x</th><td>$(-\infty; -2\sqrt{3})$</td><td>$-2\sqrt{3}$</td><td>$(-2\sqrt{3}; -2)$</td><td>$(-2; 0)$</td><td>0</td></tr><tr><th>$y'(x)$</th><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td></tr><tr><th>$y''(x)$</th><td>-</td><td></td><td>-</td><td>+</td><td>0</td></tr><tr><th>$y(x)$</th><td>$\uparrow, \cap$</td><td>$-3\sqrt{3}$</td><td>$\downarrow, \cap$</td><td>$\downarrow, \cup$</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td></td><td>max</td><td></td><td></td><td>$пер.$</td></tr></table> <table><tr><th>x</th><td>$(0; 2)$</td><td>$(2; 2\sqrt{3})$</td><td>$2\sqrt{3}$</td><td>$(2\sqrt{3}; +\infty)$</td></tr><tr><th>$y'(x)$</th><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><th>$y''(x)$</th><td>-</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr><tr><th>$y(x)$</th><td>$\downarrow, \cap$</td><td>$\downarrow, \cup$</td><td>$3\sqrt{3}$</td><td>$\uparrow, \cup$</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>min</td><td></td></tr></table>	x	$(-\infty; -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}; -2)$	$(-2; 0)$	0	$y'(x)$	+	0	-	-	0	$y''(x)$	-		-	+	0	$y(x)$	$\uparrow, \cap$	$-3\sqrt{3}$	$\downarrow, \cap$	$\downarrow, \cup$	0			max			$пер.$	x	$(0; 2)$	$(2; 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; +\infty)$	$y'(x)$	-	-	0	+	$y''(x)$	-	+		+	$y(x)$	$\downarrow, \cap$	$\downarrow, \cup$	$3\sqrt{3}$	$\uparrow, \cup$				min	
x	$(-\infty; -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}; -2)$	$(-2; 0)$	0																																																			
$y'(x)$	+	0	-	-	0																																																			
$y''(x)$	-		-	+	0																																																			
$y(x)$	$\uparrow, \cap$	$-3\sqrt{3}$	$\downarrow, \cap$	$\downarrow, \cup$	0																																																			
		max			$пер.$																																																			
x	$(0; 2)$	$(2; 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; +\infty)$																																																				
$y'(x)$	-	-	0	+																																																				
$y''(x)$	-	+		+																																																				
$y(x)$	$\downarrow, \cap$	$\downarrow, \cup$	$3\sqrt{3}$	$\uparrow, \cup$																																																				
			min																																																					
10. Графік функції.																																																								

Схема дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.
11. Множина значень функції.	$E(f) = (-\infty; +\infty)$.

IV. Побудова графіків функцій із застосуванням похідної функції

При побудові графіків функцій інколи (для наочності) доцільним буває провести дотичні у точках локального екстремума та/або у точках перегину. Натомість у деяких ситуаціях певні пункти дослідження варто пропустити через складність відповідного дослідження, ураховуючи обмеженість шкільних математичних методів.

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

- Дослідіть многочлени та побудуйте їхні графіки:
 а) $y = x^3 - 3x$; б) $y = x^3 - 4x^2 + 3$; в) $f(x) = 4x^2 - x^4$.
- Дослідіть дробово-раціональні функції та побудуйте їхні графіки, врахувавши вертикальні та горизонтальні асимптоти:
 а) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; б) $y = \frac{2x-3}{x+1}$; в) $y = \frac{3x+2}{x+1}$.
- Дослідіть дробово-раціональні функції та побудуйте їхні графіки, врахувавши поведінку в околі точок розриву:
 а) $y = \frac{1}{x^2 - 3x}$; б) $y = \frac{x+3}{x^2 - 9}$; в) $y = \frac{x^2 - 25}{x+5}$.
- Дослідіть функції та побудуйте їхні графіки:
 а) $y = (x-2)^4$; б) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; в) $y = \frac{1}{4 - x^2}$.
- Дослідіть дробово-раціональні функції та побудуйте їхні графіки, врахувавши вертикальні та похилі асимптоти:
 а) $y = x + \frac{1}{x}$; б) $y = x + \frac{4}{x}$; в) $y = x + \frac{1}{4x}$.
- Знайдіть множину значень функції, використовуючи графічний метод:
 а) $y = -x^4 + 6x^2 - 5$; б) $y = 3x^2 - x^3$; в) $y = 3x - x^3 - 2$.

Рівень В

- Дослідіть багаточлен та побудуйте його графік:
 а) $y = 0,5x^2 - 0,2x^5$; б) $y = x(x-1)^2$; в) $f(x) = (x^2 - 1)^3$.
- Дослідіть дробово-раціональну функцію та побудуйте її графік, врахувавши вертикальні та горизонтальні асимптоти:
 а) $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$; б) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$; в) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$.

- 3.** Дослідіть дробово-раціональну функцію та побудуйте її графік, врахувавши поведінку в околі точок розриву:

а) $y = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$; б) $y = \frac{x+2}{x^2-9}$; в) $y = \frac{x}{4-x^2}$.

- 4.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

а) $y = -x^2 \cdot (x+4)^2$; б) $y = \frac{2x}{x^2+1}$; в) $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$.

- 5.** Дослідіть дробово-раціональну функцію та побудуйте її графік, врахувавши вертикальні та похилі асимптоти:

а) $y = \frac{x^3+1}{x^2}$; б) $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$; в) $y = \frac{x^2}{x-2}$.

- 6.** Знайдіть множину значень функції, використовуючи графічний метод:

а) $y = x^2 - \frac{2}{x}$; б) $y = \frac{16}{x^3-4x}$; в) $f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^3}$.

- 7.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік, враховуючи специфіку області визначення:

а) $y = x\sqrt{2-x}$; б) $y = (x-1)\sqrt{x}$; в) $y = x^2\sqrt{x+1}$.

- 8.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік, враховуючи періодичність функції та/або її похідні:

а) $y = 2\sin x - \cos 2x$; б) $y = \sin x - \cos x + x$; в) $y = \frac{1+\cos x}{3-\sin x}$.

- 9.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік на основі проведеного дослідження:

а) $y = x^2 \cdot (x-2)^2$; б) $y = \frac{7x}{2x^2-3x-2}$; в) $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$.

Побудуйте графіки даних функцій, використовуючи програму GeoGebra або іншу. Порівняйте отримані результати. Зробіть висновки.

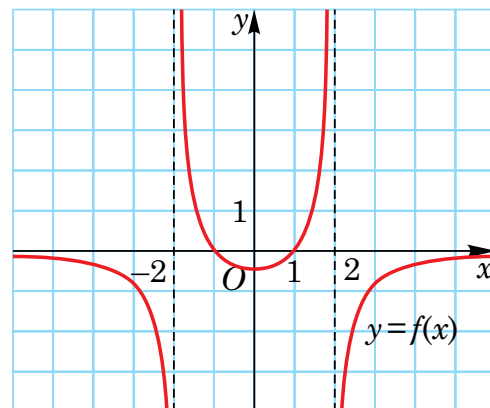
- 10.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

а) $y = \frac{x^3+x+2}{x}$; б) $y = \frac{x^3}{x-1}$; в) $y = 2\sqrt{x+1} - x - 1$.

- 11.** Побудуйте графік деякої функції, що має всі властивості одночасно:

- $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$;
- $\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = -\infty$;
- пряма $y = -2x + 1$ є похилою асимптотою;
- функція спадає на проміжках $(-\infty; -3]$; $[3; +\infty)$;
- функція зростає на проміжках $[-3; -2)$; $(-2; 2)$; $(2; 3]$.

- 12.** Підберіть функцію, яка має основні властивості аналогічні властивостям функції, графік якої наведено на рисунку. Підтвердіть правильність наведеного прикладу дослідженням.



Рівень С

- 1.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

a) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$;

$$6) f(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Побудуйте графіки даних функцій, використовуючи програму GeoGebra або іншу. Порівняйте отримані результати. Зробіть висновки.

2. Дослідіть функцію $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$ та побудуйте її графік. При побудові врахуйте точки вертикального перегину та властивості графіка в їхньому околі.
3. Дослідіть функцію $f(x) = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$ та побудуйте її графік, ураховуючи поведінку в околі точок екстремуму, точки вертикального перегину, похилу асимптоту.
4. Дослідіть функцію $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Ураховуючи проведені дослідження та властивості елементарних перетворень графіків, побудуйте графік функції $f(x) = |x^4 - 5x^2 + 4|$.
5. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1}{|x^2 - 4||x|}$ і побудуйте графік функції.
6. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1}{x} - 4x^2$. Ураховуючи проведені дослідження, побудуйте графік рівняння $|y| = \left| \frac{1}{|x|} - 4x^2 \right|$.

V. Рефлексія (1–2 хв)

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, що таке область визначення та множина значень функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію зміст понять парна/непарна функція та їхній геометричний зміст. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я розумію схему застосування границь для дослідження вертикальних, горизонтальних, похилих асимптот графіка функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

4. Я знаю достатні умови зростання/спадання) функції та точки локального максимуму/ мінімуму.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
5. Я знаю алгоритм застосування другої похідної для дослідження проміжків опуклості та точок перегину графіків функції.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
6. Я знаю схему дослідження функції.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|