11 Тема 3. Застосування похідної

Урок 21. Урок–практикум. Побудова графіків функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) повторите ідею неперервності та точок розриву функції;

2) повторите знаходження границь в точці та на нескінченності;

3) повторите рівняння вертикальних, горизонтальних, похилих асимптот;

4) повторите геометричний зміст похідної;

5) відпрацюєте навички дослідження багаточленів і дробово-раціональних функцій та побудову їхніх графіків.

II. Робота в парах. Побудова графіків функцій-багаточленів

Доцільно звернути особливу увагу учнів/учениць на наступні властивості багаточленів:

- будь-який багаточлен можна визначити на множині дійсних чисел;
- будь-який багаточлен є неперервним на області визначення;
- у багаточлена не має точок розриву, а у відповідного графіка немає вертикальних асимптот;
- у графіка багаточлена, який має степінь вищий за 1, немає горизонтальних та похилих асимптот.

Таким чином, найважливіші етапи дослідження багаточленів пов'язані з нулями, монотонністю та екстремумами, опуклістю та точками перегину.

Завдання для роботи в парах

1. Побудуйте в системі координат пряму, що проходить через точку (3; 1) та є паралельною осі абсцис.

2. Для квадратичної функції $y = x^2 - 6x + 8$ побудуйте графік та проведіть дотичну у вершині параболи. Як вона розташована відносно осі абсцис? Обґрунтуйте відповідь, використовуючи теорему Ферма.

3. Для функції $y = x^3 + 3x^2$:

а) знайдіть точку екстремуму x_0 та побудуйте дотичну до графіка функції в точці $(x_0; y(x_0))$;

б) знайдіть точку перегину x_1, а також $y(x_1)$ та $y'(x_1)$, та побудуйте дотичну до графіка в точці $(x_1; y(x_1))$, враховуючий геометричний зміст похідної.

4. Дослідіть властивості функції $y = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2$ та побудуйте її графік. Побудуйте дотичні до графіка в точках екстремуму та перегину. Перевірте отримані результати з використанням програми GeoGebra або іншої.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	**Функція** $y = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2$
Без похідної	
1. Область визначення функції.	$D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	
4. Проміжки знакосталості.	
5. Неперервність, точки розриву.	Функція неперервна на $(-\infty; +\infty)$. Точок розриву немає.
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Асимптот немає, оскільки $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(0{,}25x^3 - 1{,}5x^2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}25x^3\left(1 - \frac{6}{x}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(0{,}25x^3 - 1{,}5x^2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}25x^3\left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty$.
З використанням похідної	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	
З використанням другої похідної	
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	**Функція** $y = 0,25x^3 - 1,5x^2$
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x | | $y'(x)$ | | $y''(x)$ | | $y(x)$ | | | |
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

5. Доведіть, що багаточлен непарного степеню має принаймні один дійсний корінь.

Вказівка. Дослідіть поведінку даної функції-багаточлена на $-\infty$ та $+\infty$ і доведіть, що при великих за модулем значеннях аргументу функція набуває різних за знаком значень при додатних та від'ємних значеннях x відповідно. Скористайтеся теоремою Больцано-Коші.

III. Робота в малих групах. Побудова графіків дробово-раціональних функцій

Доцільно звернути особливу увагу учнів/учениць на наступні властивості дробово-раціональних функцій:

- будь-яку дробово-раціональну функцію можна визначити в усіх точках, окрім тих, у яких знаменник відповідної формули дорівнює 0;
- будь-яка дробово-раціональна функція є неперервною на області визначення;
- точки розриву дробово-раціональної функції відповідають числам, при яких знаменник відповідної формули дорівнює 0;

- точки розриву можуть відповідати вертикальним асимптотам; горизонтальна асимптота буде у графіка за умови, що степені чисельника та знаменника відповідної формули збігаються; похила асимптота буде за умови, що степінь чисельника на 1 більший за степінь знаменника.

Таким чином, найважливіші етапи дослідження дробово-раціональних функцій пов'язані з областю визначення, поведінкою поблизу точок розриву, монотонністю та екстремумами, асимптотами графіка.

Завдання для роботи в малих групах

5. Для функції $y = \dfrac{1}{x^3 - 8}$ знайдіть: область визначення, точку розриву, поведінку функції в деякому околі точки розриву, рівняння вертикальної асимптоти.

6. Для функції $y = \dfrac{4x^3 - 3x^2 + x - 4}{2x^3 - 8x^2 + 1}$ знайдіть: границю при $x \to \infty$, рівняння горизонтальної асимптоти графіка.

7. Для функції $y = \dfrac{2x^3 - x^2 + x - 4}{x^2 - x + 1}$ знайдіть:

а) $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y(x)}{x}$; б) $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(y(x) - kx \right)$;

в) рівняння похилої асимптоти у вигляді $y = kx + b$.

8. Дослідіть властивості функції $y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ та побудуйте її графік. Побудуйте вертикальні та горизонтальну асимптоти. Перевірте отримані результати з використанням програми GeoGebra або іншої.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	**Функція** $y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$.
Без похідної	
1. Область визначення функції.	
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	
4. Проміжки знакосталості.	
5. Неперервність, точки розриву.	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	**Функція** $y=\dfrac{2}{x^2-1}$.
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Асимптоти: • вертикальні $x=x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} y(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0} y(x)=\infty$; • горизонтальні $y=y_0$, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=y_0$ або аналогічна границя існує при $x\to+\infty$, або $x\to-\infty$; • похилі $y=kx+b$, якщо існують границі $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)$ або аналогічні границі існують при $x\to+\infty$, або $x\to-\infty$.
З використанням похідної	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	
З використанням другої похідної	
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x | $y'(x)$ | $y''(x)$ | $y(x)$ | |
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

9. Дослідіть властивості функції $y = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$ та побудуйте її графік. Побудуйте вертикальні та похилу асимптоти. Перевірте отримані результати з використанням програми GeoGebra або іншої.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	**Функція** $y = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$.
Без похідної	
1. Область визначення функції.	
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	
4. Проміжки знакосталості.	
5. Неперервність, точки розриву.	
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Асимптоти: • вертикальні $x = x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} y(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} y(x) = \infty$; • горизонтальні $y = y_0$, якщо $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = y_0$ або аналогічна границя існує при $x \to +\infty$, або $x \to -\infty$; • похилі $y = kx + b$, якщо існують границі $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(y(x) - kx \right)$ або аналогічні границі існують при $x \to +\infty$, або $x \to -\infty$.
З використанням похідної	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	
З використанням другої похідної	
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	

<table>
<tr><th colspan="2">Дослідження властивостей функції</th></tr>
<tr><th>Етап дослідження</th><th>Функція $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$.</th></tr>
<tr><td>9. Таблиця властивостей функції та її похідних.</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>$y'(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$y''(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$y(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>10. Графік функції.</td><td></td></tr>
<tr><td>11. Множина значень функції.</td><td></td></tr>
</table>

Висновок. При дослідженні функцій застосовуються границі функції в точці та на нескінченності, перша та друга похідна. Для багаточленів особливу увагу варто приділяти екстремумам та точкам перегину. Для дробово-раціональних функцій окремо треба звертати увагу на точки розриву та асимптоти.

IV. Додаткові завдання

Рівень А

1. Дослідіть багаточлен та побудуйте його графік:

а) $y=x^4-2x^2+1$; б) $y=0{,}5x^4-4x^2$; в) $y=4x-\dfrac{1}{3}x^3$.

Рівень В

2. Дослідіть дробово-раціональну функцію та побудуйте її графік, а також вертикальні та горизонтальні асимптоти:

а) $y=\dfrac{x-4}{x+2}$; б) $y=\dfrac{3}{5x-x^2}$; в) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Рівень С

3. Дослідіть дробово-раціональну функцію та побудуйте її графік, а також вертикальні та похилі асимптоти:

а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$; в) $y=\dfrac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Жахливі Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

1) . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

2) . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

? . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .