

Урок 21. Урок–практикум. Побудова графіків функцій

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Робота в парах. Побудова графіків функцій-багаточленів.
2. Робота в малих групах. Побудова графіків дробово-раціональних функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П].

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює їхнє застосування, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку — формування умінь та навичок щодо дослідження багаточленів та дробово-раціональних функцій та побудову їхніх графіків.
- 2) Додаткова мета уроку — повторення границь, властивостей неперервних функцій, точок розриву, рівнянь асимптот, застосування першої та другої похідної функції.
- 3) Обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 4) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.
- 5) Організуйте роботу в парах і працюють над дослідженням властивостей функцій. Учитель виступає у ролі консультанта та радника. Важливим елементом роботи є набуття навичок самоперевірки та взаємоперевірки.
- 6) Організуйте роботу в малих групах (4–5 осіб) для побудови графіків функцій. Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу.

I. Робота в парах. Побудова графіків функцій-багаточленів

Доцільно звернути особливу увагу учнів/учениць на наступні властивості багаточленів:

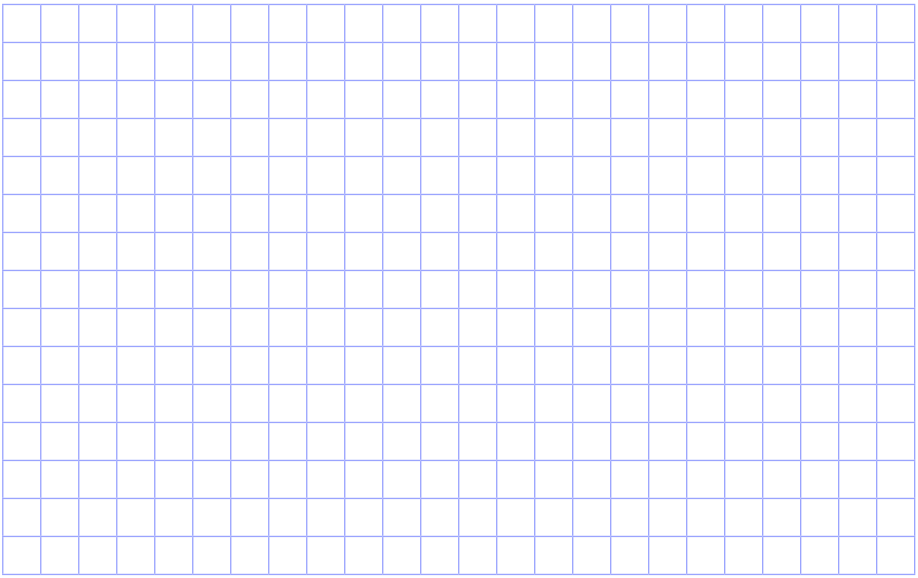
- будь-який багаточлен можна визначити на множині дійсних чисел;
- будь-який багаточлен є неперервним на області визначення;
- у багаточлена не має точок розриву, а у відповідного графіка немає вертикальних асимптот;
- у графіка багаточлена, який має степінь вищий за 1, немає горизонтальних та похилих асимптот.

Таким чином, найважливіші етапи дослідження багаточленів пов'язані з нулями, монотонністю та екстремумами, опуклістю та точками перегину.

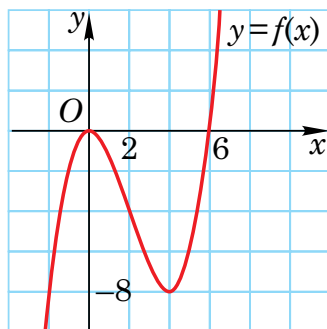
Завдання для роботи в парах

1. Побудуйте в системі координат пряму, що проходить через точку (3; 1) та є паралельною осі абсцис.
2. Для квадратичної функції $y = x^2 - 6x + 8$ побудуйте графік та проведіть дотичну у вершині параболи. Як вона розташована відносно осі абсцис? Обґрунтуйте відповідь, використовуючи теорему Ферма.
3. Для функції $y = x^3 + 3x^2$:
 - а) знайдіть точку екстремуму x_0 та побудуйте дотичну до графіка функції в точці $(x_0; y(x_0))$;
 - б) знайдіть точку перегину x_1 , а також $y(x_1)$ та $y'(x_1)$, та побудуйте дотичну до графіка в точці $(x_1; y(x_1))$, враховуючий геометричний зміст похідної.
4. Дослідіть властивості функції $y = 0,25x^3 - 1,5x^2$ та побудуйте її графік. Побудуйте дотичні до графіка в точках екстремуму та перегину. Перевірте отримані результати з використанням програми GeoGebra або іншої.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $y = 0,25x^3 - 1,5x^2$
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	$D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	
4. Проміжки знакосталості.	

Дослідження властивостей функції											
Етап дослідження	Функція $y = 0,25x^3 - 1,5x^2$										
5. Неперервність, точки розриву.	Функція неперервна на $(-\infty; +\infty)$. Точок розриву немає.										
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Асимптот немає, оскільки $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (0,25x^3 - 1,5x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0,25x^3 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = -\infty,$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (0,25x^3 - 1,5x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0,25x^3 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty.$										
З використанням похідної											
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.											
З використанням другої похідної											
8. Проміжки опуклості та точки перегину.											
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	<table> <tr><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>$y'(x)$</td><td></td></tr> <tr><td>$y''(x)$</td><td></td></tr> <tr><td>$y(x)$</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> </table>	x		$y'(x)$		$y''(x)$		$y(x)$			
x											
$y'(x)$											
$y''(x)$											
$y(x)$											
10. Графік функції.											
11. Множина значень функції.											

Графік функції побудовано на рисунку.



5. Доведіть, що багаточлен непарного степеню має принаймні один дійсний корінь.

Вказівка. Дослідіть поведінку даної функції-багаточлена на $-\infty$ та $+\infty$ і доведіть, що при великих за модулем значеннях аргументу функція набуває різних за знаком значень при додатних та від'ємних значеннях x відповідно. Скористайтеся теоремою Больцано-Коші.

II. Робота в малих групах. Побудова графіків дробово-раціональних функцій

Доцільно звернути особливу увагу учнів/учениць на наступні властивості дробово-раціональних функцій:

- будь-яку дробово-раціональну функцію можна визначити в усіх точках, окрім тих, у яких знаменник відповідної формули дорівнює 0;
- будь-яка дробово-раціональна функція є неперервною на області визначення;
- точки розриву дробово-раціональної функції відповідають числам, при яких знаменник відповідної формули дорівнює 0;
- точки розриву можуть відповідати вертикальним асимптотам; горизонтальна асимптота буде у графіка за умови, що степені чисельника та знаменника відповідної формули збігаються; похила асимптота буде за умови, що степінь чисельника на 1 більший за степінь знаменника.

Таким чином, найважливіші етапи дослідження дробово-раціональних функцій пов'язані з областю визначення, поведінкою поблизу точок розриву, монотонністю та екстремумами, асимптотами графіка.

Завдання для роботи в малих групах

5. Для функції $y = \frac{1}{x^3 - 8}$ знайдіть: область визначення, точку розриву, поведінку функції в деякому околі точки розриву, рівняння вертикальної асимптоти.
6. Для функції $y = \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 4}{2x^3 - 8x^2 + 1}$ знайдіть: границю при $x \rightarrow \infty$, рівняння горизонтальної асимптоти графіка.

7. Для функції $y = \frac{2x^3 - x^2 + x - 4}{x^2 - x + 1}$ знайдіть:

а) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$;

б) $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - kx)$;

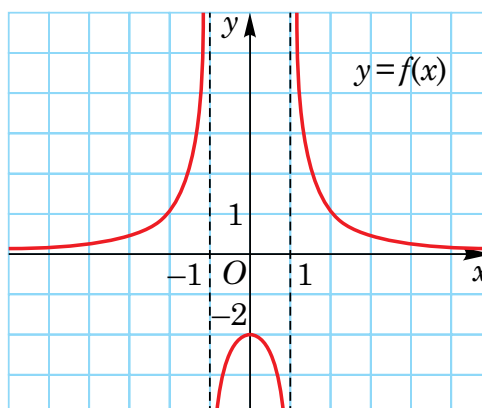
в) рівняння похилої асимптоти у вигляді $y = kx + b$.

8. Дослідіть властивості функції $y = \frac{2}{x^2 - 1}$ та побудуйте її графік. Побудуйте вертикальні та горизонтальну асимптоти. Перевірте отримані результати з використанням програми GeoGebra або іншої.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $y = \frac{2}{x^2 - 1}$.
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	
4. Проміжки знакосталості.	
5. Неперервність, точки розриву.	
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Асимптоти: • вертикальні $x = x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} y(x) = \infty$; • горизонтальні $y = y_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = y_0$ або аналогічна границя існує при $x \rightarrow +\infty$, або $x \rightarrow -\infty$; • похилі $y = kx + b$, якщо існують границі $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$; $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - kx)$ або аналогічні границі існують при $x \rightarrow +\infty$, або $x \rightarrow -\infty$.
<i>З використанням похідної</i>	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	
<i>З використанням другої похідної</i>	
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $y = \frac{2}{x^2 - 1}$.
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x
	$y'(x)$
	$y''(x)$
	$y(x)$
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

Графік функції побудовано на рисунку.

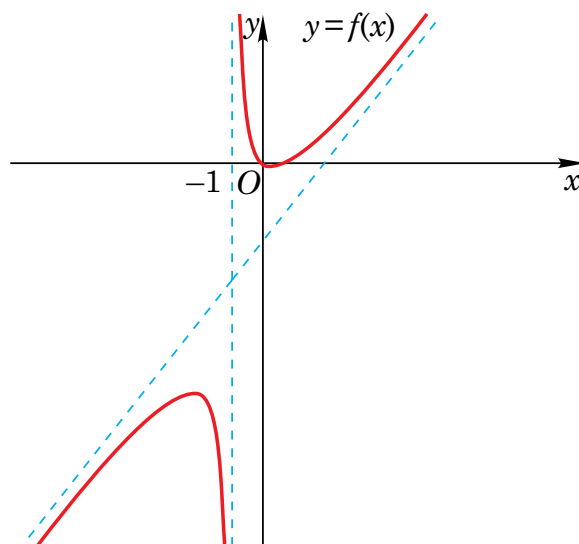


9. Дослідіть властивості функції $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ та побудуйте її графік. Побудуйте вертикальні та похилу асимптоти. Перевірте отримані результати з використанням програми GeoGebra або іншої.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	
4. Проміжки знакосталості.	
5. Неперервність, точки розриву.	
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Асимптоти: • вертикальні $x = x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0-0} y(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow x_0+0} y(x) = \infty$; • горизонтальні $y = y_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = y_0$ або аналогічна границя існує при $x \rightarrow +\infty$, або $x \rightarrow -\infty$; • похилі $y = kx + b$, якщо існують границі $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$; $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - kx)$ або аналогічні границі існують при $x \rightarrow +\infty$, або $x \rightarrow -\infty$.
<i>З використанням похідної</i>	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	
<i>З використанням другої похідної</i>	
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x
	$y'(x)$
	$y''(x)$
	$y(x)$
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

Графік функції побудовано на рисунку.



Висновок. При дослідженні функцій застосовуються границі функції в точці та на нескінченності, перша та друга похідна. Для багаточленів особливу увагу варто приділяти екстремумам та точкам перегину. Для дробово-раціональних функцій окремо треба звертати увагу на точки розриву та асимптоти.

III. Додаткові завдання

Рівень А

1. Дослідіть багаточлен та побудуйте його графік:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 1$; б) $y = 0,5x^4 - 4x^2$; в) $y = 4x - \frac{1}{3}x^3$.

Рівень В

2. Дослідіть дробово-раціональну функцію та побудуйте її графік, а також вертикальні та горизонтальні асимптоти:

а) $y = \frac{x-4}{x+2}$; б) $y = \frac{3}{5x-x^2}$; в) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Рівень С

3. Дослідіть дробово-раціональну функцію та побудуйте її графік, а також вертикальні та похилі асимптоти:

а) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $y = \frac{x^2}{x-2}$; в) $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.

IV. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
-
-
- 2)
-
-
- ?
-
-