

Урок 2. Урок–практикум. Побудова графіків функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) відпрацюєте вміння та навички застосування першої і другої похідної для дослідження функцій;
- 2) удосконалисте навички дослідження властивостей функції;
- 3) пригадаєте особливості тригонометричних та ірраціональних функцій;
- 4) розв'яжете завдання ЗНО на застосування похідної.

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Знайдіть точки розриву функції: $y = \frac{3}{5x - x^2}$.
2. Дослідіть функцію $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ на парність/непарність.
3. Знайдіть проміжки зростання функції $y = (x - 1)\sqrt{x}$.
4. Знайдіть проміжки, на яких функція $y = 4x - \frac{1}{3}x^3$ опукла вгору.
5. Знайдіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $y = \frac{x^2}{x - 2}$.

Завдання для обговорення

1. Дослідіть функцію $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$ та побудуйте її графік.

Етап дослідження	Функція $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	$D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	Область визначення не симетрична відносно 0. Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна.
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	$y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Точка перетину з осями координат: $(2; 0)$, $\left(0; \frac{8}{9}\right)$.
4. Проміжки знакосталості.	$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$.
5. Неперервність, точки розриву.	Функція неперервна на $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Точка розриву: $x = 3$.
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Оскільки $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} = -\infty$, то пряма $x = 3$ є вертикальною асимптотою графіка. Оскільки $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} = -\infty$, то графік функції не має горизонтальних асимптот. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-x)^3}{x(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{x} - 1\right)^3}{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^2} = -1 = k$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 8}{(x-3)^2} = 0 = b$, то пряма $y = -x$ є похилою асимптотою графіка функції.

Етап дослідження	Функція $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.																																			
З використанням похідної																																				
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	Якщо $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$, то $y'(x) = \frac{-(x-5)(2-x)^2}{(x-3)^3}$. Функція зростає на проміжку $(3; 5]$ та спадає на проміжках $(-\infty; 3); [5; +\infty)$. Точка екстремуму: $x_{\max} = 5$; $y_{\max} = -6\frac{3}{4}$																																			
З використанням другої похідної																																				
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	Оскільки $y'(x) = \frac{-(x-5)(2-x)^2}{(x-3)^3}$, то $y''(x) = \frac{6(2-x)}{(x-3)^4}$. Функція опукла вниз на проміжку $(-\infty; 2]$. Функція опукла вгору на проміжках $[2; 3); (3; +\infty)$; Точка перегину: $x = 2$.																																			
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	<table><tr><th>x</th><th>$(-\infty; 2)$</th><th>2</th><th>$(2; 3)$</th><th>$(3; 5)$</th><th>5</th><th>$(5; +\infty)$</th></tr><tr><td>$y'(x)$</td><td>–</td><td>0</td><td>–</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr><tr><td>$y''(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>–</td><td></td><td>–</td></tr><tr><td>$y(x)$</td><td>$\downarrow, \cup$</td><td>0</td><td>$\downarrow, \cap$</td><td>$\uparrow, \cap$</td><td>$-6\frac{3}{4}$</td><td>$\downarrow, \cap$</td></tr><tr><td></td><td></td><td>пер.</td><td></td><td></td><td>max</td><td></td></tr></table>	x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	$(3; 5)$	5	$(5; +\infty)$	$y'(x)$	–	0	–	+	0	–	$y''(x)$	+	0	–	–		–	$y(x)$	$\downarrow, \cup$	0	$\downarrow, \cap$	$\uparrow, \cap$	$-6\frac{3}{4}$	$\downarrow, \cap$			пер.			max	
x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	$(3; 5)$	5	$(5; +\infty)$																														
$y'(x)$	–	0	–	+	0	–																														
$y''(x)$	+	0	–	–		–																														
$y(x)$	$\downarrow, \cup$	0	$\downarrow, \cap$	$\uparrow, \cap$	$-6\frac{3}{4}$	$\downarrow, \cap$																														
		пер.			max																															
10. Графік функції.																																				

Етап дослідження	Функція $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.
11. Множина значень функції.	$E(f) = (-\infty; +\infty)$.

III. Робота в парах. Побудова графіків складних тригонометричних функцій

Доцільно звернути особливу увагу учнів/учениць на наступні властивості тригонометричних функцій:

- періодичність (як правило);
- неперервність на всій області визначення.

Таким чином, найважливіші етапи дослідження тригонометричних функцій пов'язані з періодичністю, нулями, монотонністю та екстремумами, опуклістю та точками перегину.

Задачі для роботи в парах.

2. Дослідіть функцію $f(x) = \sin 2x - x$ та побудуйте її графік. Порівняйте результати дослідження з комп'ютерним моделюванням.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = \sin 2x - x$
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	
4. Проміжки знакосталості.	
5. Неперервність, точки розриву.	
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = \sin 2x - x$
<i>З використанням похідної</i>	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	
<i>З використанням другої похідної</i>	
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x
	$y'(x)$
	$y''(x)$
	$y(x)$
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

- 3.** Дослідіть функцію $f(x) = \sin 2x \cdot \sin x$ та побудуйте її графік. Порівняйте результати дослідження з комп'ютерним моделюванням.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = \sin 2x \cdot \sin x$
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	

Дослідження властивостей функції		
Етап дослідження	Функція $f(x) = \sin 2x \cdot \sin x$	
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.		
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.		
4. Проміжки знакосталості.		
5. Неперервність, точки розриву.		
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.		
З використанням похідної		
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.		
З використанням другої похідної		
8. Проміжки опуклості та точки перегину.		
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x	
	$y'(x)$	
	$y''(x)$	
	$y(x)$	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = \sin 2x \cdot \sin x$
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

IV. Робота в малих групах. Побудова графіків ірраціональних функцій

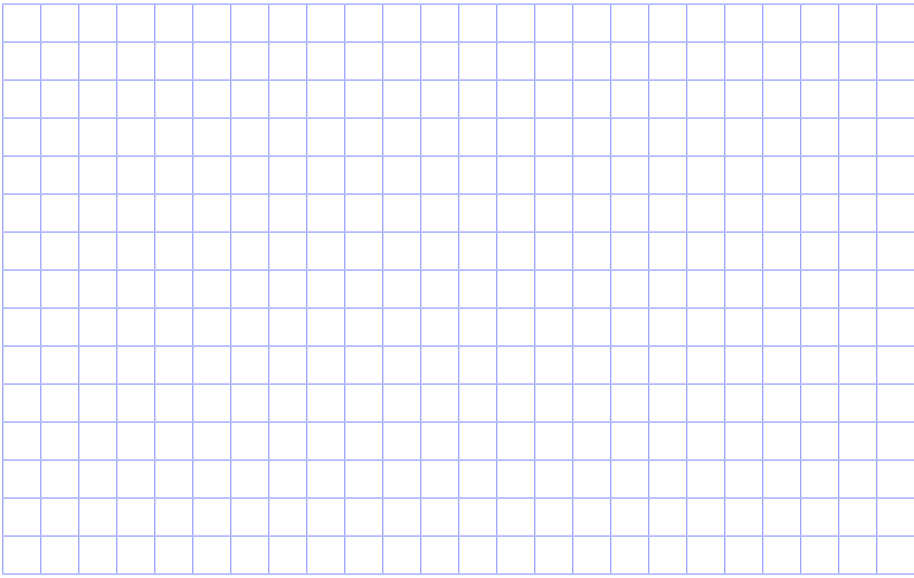
Завдання для роботи в малих групах

4. Дослідіть функцію $f(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 2$ та побудуйте її графік. Порівняйте результати дослідження з комп'ютерним моделюванням.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 2$
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	
4. Проміжки знакосталості.	
5. Неперервність, точки розриву.	

5. Дослідіть функцію $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ та побудуйте її графік. Порівняйте результати дослідження з комп'ютерним моделюванням.

Дослідження властивостей функції		
Етап дослідження	Функція $f(x) = x - 2\sqrt{x + 2} + 2$	
Без похідної		
1. Область визначення функції.		
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.		
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.		
4. Проміжки знакосталості.		
5. Неперервність, точки розриву.		
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.		
З використанням похідної		
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.		
З використанням другої похідної		
8. Проміжки опуклості та точки перегину.		
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x	
	$y'(x)$	
	$y''(x)$	
	$y(x)$	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 2$
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

IV. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему ЗНО 2021 року?

Задача. Задано функцію $y = x^3 - 12x$.

1. Для наведених у таблиці значень аргументу x визначте відповідні їм значення y .

x	y
-1	
0	
2	

- Визначте й запишіть координати точок перетину графіка функції $y = x^3 - 12x$ із віссю x .
- Визначте похідну $f'(x)$ функції $f(x) = x^3 - 12x$.
- Визначте нулі функції $f'(x)$.
- Визначте проміжки зростання і спадання, точки екстремуму та екстремуми функції $f(x)$.
- Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$.

V. Додаткові завдання

Рівень А

1. Знайдіть область визначення функцій:

а) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x}$;

б) $y = \frac{\sqrt[3]{x^4 - x^2}}{x^2 - 1}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 2x} - 3x + 1$.

2. Знайдіть додатний період функції:

а) $y = \cos x \cdot \cos 3x$;

б) $y = \operatorname{tg} x - \sin 0,5x$;

в) $y = \sqrt{\sin x}$.

Рівень В

3. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

а) $y = x\sqrt{x} - 6x$;

б) $y = x^2\sqrt{2-x}$;

в) $y = 2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

4. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

а) $y = \sin x + 0,5x$;

б) $y = 2\cos x - \cos 2x$;

в) $y = \frac{6\sin x}{2 + \cos x}$.

Рівень С

5. Дослідіть функцію $y = \left| \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2-1}} - 2 \right|$ та побудуйте її графік. Порівняйте результати дослідження з комп'ютерним моделюванням. Знайдіть найбільшу можливу кількість коренів рівняння виду $\left| \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2-1}} - 2 \right| = a$.

Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку



