

Урок 2. Урок–практикум. Побудова графіків функцій

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Формування умінь і навичок. Робота в парах. Побудова графіків складних тригонометричних функцій.
3. Формування умінь і навичок. Робота в малих групах. Побудова графіків ірраціональних функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку — формування умінь та навичок щодо дослідження складних тригонометричних та ірраціональних функцій та побудови їхніх графіків.
- 2) Додаткова мета уроку — повторення границь, властивостей неперервних функцій, точок розриву, рівнянь асимптот, застосування першої та другої похідної функції.
- 3) Сформулюйте задачу із ЗНО/НМТ. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 5) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.
- 6) Організуйте роботу в парах для побудови графіків складних тригонометричних функцій.
- 7) Організуйте роботу в малих групах для побудови графіків ірраціональних функцій.
- 8) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

Як я вирішую певну проблему ЗНО 2021 року?

Задача. Задано функцію $y = x^3 - 12x$.

1. Для наведених у таблиці значень аргументу x визначте відповідні їм значення y .

x	y
-1	
0	
2	

2. Визначте й запишіть координати точок перетину графіка функції $y = x^3 - 12x$ із віссю x .
3. Визначте похідну $f'(x)$ функції $f(x) = x^3 - 12x$.
4. Визначте нулі функції $f'(x)$.
5. Визначте проміжки зростання і спадання, точки екстремуму та екстремуми функції $f(x)$.
6. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$.

I. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Знайдіть точки розриву функції: $y = \frac{3}{5x - x^2}$.

Відповідь. 0; 5.

2. Дослідіть функцію $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ на парність/непарність.

Відповідь. Функція на парна, ні непарна.

3. Знайдіть проміжки зростання функції $y = (x - 1)\sqrt{x}$.

Відповідь. $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

4. Знайдіть проміжки, на яких функція $y = 4x - \frac{1}{3}x^3$ опукла вгору.

Відповідь. $x \in [0; +\infty)$.

5. Знайдіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $y = \frac{x^2}{x - 2}$.

Відповідь. $y = x + 2$.

Завдання для обговорення

1. Дослідіть функцію $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$ та побудуйте її графік.

Етап дослідження	Функція $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	$D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	Область визначення не симетрична відносно 0. Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна.
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	$y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Точка перетину з осями координат: $(2; 0)$, $\left(0; \frac{8}{9}\right)$.
4. Проміжки знакосталості.	$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$.
5. Неперервність, точки розриву.	Функція неперервна на $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Точка розриву: $x = 3$.
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Оскільки $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} = -\infty$, то пряма $x = 3$ є вертикальною асимптотою графіка. Оскільки $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} = -\infty$, то графік функції не має горизонтальних асимптот. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-x)^3}{x(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{x} - 1\right)^3}{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^2} = -1 = k$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 8}{(x-3)^2} = 0 = b$, то пряма $y = -x$ є похилою асимптотою графіка функції.

Етап дослідження	Функція $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.																																			
З використанням похідної																																				
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	Якщо $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$, то $y'(x) = \frac{-(x-5)(2-x)^2}{(x-3)^3}$. Функція зростає на проміжку $(3; 5]$ та спадає на проміжках $(-\infty; 3); [5; +\infty)$. Точка екстремуму: $x_{\max} = 5$; $y_{\max} = -6\frac{3}{4}$																																			
З використанням другої похідної																																				
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	Оскільки $y'(x) = \frac{-(x-5)(2-x)^2}{(x-3)^3}$, то $y''(x) = \frac{6(2-x)}{(x-3)^4}$. Функція опукла вниз на проміжку $(-\infty; 2]$. Функція опукла вгору на проміжках $[2; 3); (3; +\infty)$; Точка перегину: $x = 2$.																																			
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	<table><tr><th>x</th><th>$(-\infty; 2)$</th><th>2</th><th>$(2; 3)$</th><th>$(3; 5)$</th><th>5</th><th>$(5; +\infty)$</th></tr><tr><td>$y'(x)$</td><td>–</td><td>0</td><td>–</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr><tr><td>$y''(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>–</td><td></td><td>–</td></tr><tr><td>$y(x)$</td><td>$\downarrow, \cup$</td><td>0</td><td>$\downarrow, \cap$</td><td>$\uparrow, \cap$</td><td>$-6\frac{3}{4}$</td><td>$\downarrow, \cap$</td></tr><tr><td></td><td></td><td>пер.</td><td></td><td></td><td>max</td><td></td></tr></table>	x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	$(3; 5)$	5	$(5; +\infty)$	$y'(x)$	–	0	–	+	0	–	$y''(x)$	+	0	–	–		–	$y(x)$	$\downarrow, \cup$	0	$\downarrow, \cap$	$\uparrow, \cap$	$-6\frac{3}{4}$	$\downarrow, \cap$			пер.			max	
x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	$(3; 5)$	5	$(5; +\infty)$																														
$y'(x)$	–	0	–	+	0	–																														
$y''(x)$	+	0	–	–		–																														
$y(x)$	$\downarrow, \cup$	0	$\downarrow, \cap$	$\uparrow, \cap$	$-6\frac{3}{4}$	$\downarrow, \cap$																														
		пер.			max																															
10. Графік функції.																																				

Етап дослідження	Функція $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.
11. Множина значень функції.	$E(f) = (-\infty; +\infty)$.

II. Робота в парах. Побудова графіків складних тригонометричних функцій

Доцільно звернути особливу увагу учнів/учениць на наступні властивості тригонометричних функцій:

- періодичність (як правило);
- неперервність на всій області визначення.

Таким чином, найважливіші етапи дослідження тригонометричних функцій пов'язані з періодичністю, нулями, монотонністю та екстремумами, опуклістю та точками перегину.

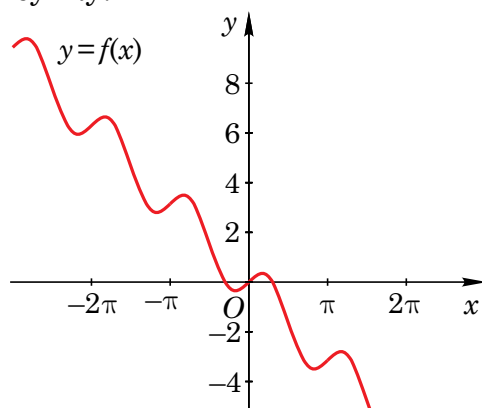
Задачі для роботи в парах.

2. Дослідіть функцію $f(x) = \sin 2x - x$ та побудуйте її графік. Порівняйте результати дослідження з комп'ютерним моделюванням.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = \sin 2x - x$
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	
4. Проміжки знакосталості.	
5. Неперервність, точки розриву.	
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	

Дослідження властивостей функції											
Етап дослідження	Функція $f(x) = \sin 2x - x$										
<i>З використанням похідної</i>											
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.											
<i>З використанням другої похідної</i>											
8. Проміжки опуклості та точки перегину.											
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	<table> <tr><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>$y'(x)$</td><td></td></tr> <tr><td>$y''(x)$</td><td></td></tr> <tr><td>$y(x)$</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> </table>	x		$y'(x)$		$y''(x)$		$y(x)$			
x											
$y'(x)$											
$y''(x)$											
$y(x)$											
10. Графік функції.											
11. Множина значень функції.											

Графік побудовано на рисунку.

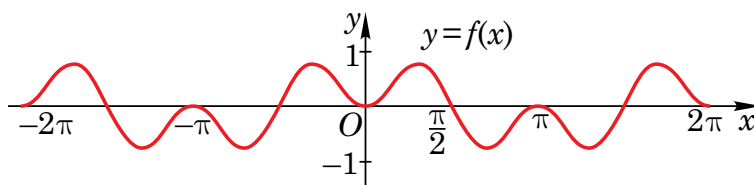


- 3.** Дослідіть функцію $f(x) = \sin 2x \cdot \sin x$ та побудуйте її графік. Порівняйте результати дослідження з комп'ютерним моделюванням.

Дослідження властивостей функції		
Етап дослідження	Функція $f(x) = \sin 2x \cdot \sin x$	
Без похідної		
1. Область визначення функції.		
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.		
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.		
4. Проміжки знакосталості.		
5. Неперервність, точки розриву.		
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.		
З використанням похідної		
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.		
З використанням другої похідної		
8. Проміжки опуклості та точки перегину.		
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x	
	$y'(x)$	
	$y''(x)$	
	$y(x)$	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = \sin 2x \cdot \sin x$
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

Графік побудовано на рисунку



III. Робота в малих групах. Побудова графіків ірраціональних функцій

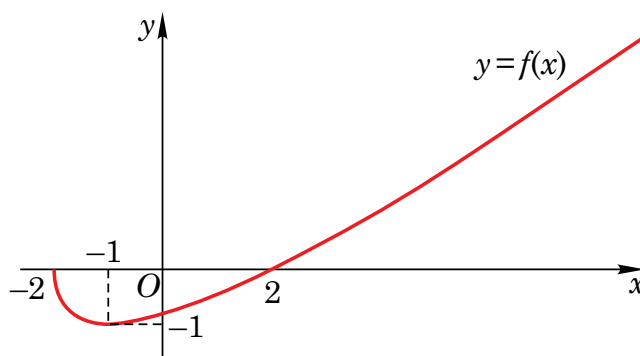
Завдання для роботи в малих групах

4. Дослідіть функцію $f(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 2$ та побудуйте її графік. Порівняйте результати дослідження з комп'ютерним моделюванням.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 2$
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 2$
4. Проміжки знакосталості.	
5. Неперервність, точки розриву.	
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	
<i>З використанням похідної</i>	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	
<i>З використанням другої похідної</i>	
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x
	$y'(x)$
	$y''(x)$
	$y(x)$
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

Графік побудовано на рисунку.

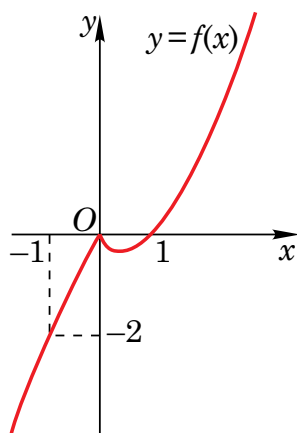


5. Дослідіть функцію $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ та побудуйте її графік. Порівняйте результати дослідження з комп'ютерним моделюванням.

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 2$
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	
4. Проміжки знакосталості.	
5. Неперервність, точки розриву.	
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	
<i>З використанням похідної</i>	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	
<i>З використанням другої похідної</i>	
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 2$
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x
	$y'(x)$
	$y''(x)$
	$y(x)$
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

Графік побудовано на рисунку.



IV. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему ЗНО 2021 року?

Задача. Задано функцію $y = x^3 - 12x$.

1. Для наведених у таблиці значень аргументу x визначте відповідні їм значення y .

x	y
-1	
0	
2	

2. Визначте й запишіть координати точок перетину графіка функції $y = x^3 - 12x$ із віссю x .
3. Визначте похідну $f'(x)$ функції $f(x) = x^3 - 12x$.
4. Визначте нулі функції $f'(x)$.
5. Визначте проміжки зростання і спадання, точки екстремуму та екстремуми функції $f(x)$.
6. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$.

Розв'язання.

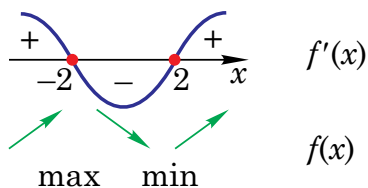
1. У таблиці наведені значення аргументу x та відповідні їм значення y .

x	y
-1	11
0	0
2	-16

2. Координати точок перетину графіка функції $y = x^3 - 12x$ із віссю x :
 $x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 12) = 0$, $x = 0$, $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$.

Отже, $A(0; 0)$, $B(2\sqrt{3}; 0)$, $C(-2\sqrt{3}; 0)$.

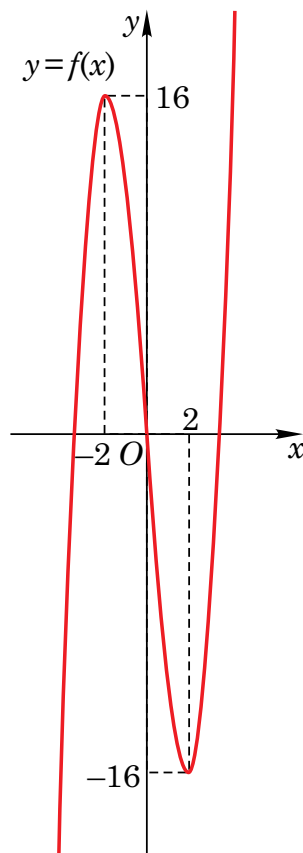
3. Похідна функції: $f'(x) = 3x^2 - 12$.
4. Критичні точки функції: $3x^2 - 12 = 0$, $x = -2$, $x = 2$.
5. Оскільки $f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$, то крива знаків для похідної функції:



Таким чином, $f \uparrow x \in (-\infty; -2]; [2; +\infty)$ — функція зростає, $f \downarrow x \in [-2; 2]$ — функція спадає.

Точки екстремуму функції: $x_{\min} = 2, y_{\min} = -16$, $x_{\max} = -2, y_{\max} = 16$.

6. Ескіз графіка функції $f(x)$ (див. рисунок).



Висновок. При дослідженні функцій застосовуються границі функції в точці та на нескінченності, перша та друга похідна. Для тригонометричних функцій особливу увагу варто приділяти періодичності, екстремумам та точкам перегину. Для ірраціональних функцій окремо треба звертати увагу на область визначення.

V. Додаткові завдання

Рівень А

1. Знайдіть область визначення функцій:

а) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x}$;

б) $y = \frac{\sqrt[3]{x^4 - x^2}}{x^2 - 1}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 2x} - 3x + 1$.

2. Знайдіть додатний період функції:

а) $y = \cos x \cdot \cos 3x$;

б) $y = \operatorname{tg} x - \sin 0,5x$;

в) $y = \sqrt{\sin x}$.

Рівень В

3. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

а) $y = x\sqrt{x} - 6x$;

б) $y = x^2\sqrt{2-x}$;

в) $y = 2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

4. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

а) $y = \sin x + 0,5x$;

б) $y = 2\cos x - \cos 2x$;

в) $y = \frac{6\sin x}{2 + \cos x}$.

Рівень С

5. Дослідіть функцію $y = \left| \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} - 2 \right|$ та побудуйте її графік. Порівняйте результати дослідження з комп'ютерним моделюванням. Знайдіть найбільшу можливу кількість коренів рівняння виду $\left| \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} - 2 \right| = a$.

VI. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
.....
.....
- 2) Мені найбільше запам'яталося
.....
.....
- 3) Для мене було найцікавішим
.....
.....
- 4) Для мене було найскладнішим
.....
.....
- 5) Я припустився/припустилася помилки
.....
.....
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.....
.....
- 7) Поради собі до наступного уроку
.....
.....