

Урок 23. Урок–практикум. Побудова графіків функцій. Дослідження кількості коренів рівнянь з параметрами

Тип уроку: урок формування вмінь та навичок.

План уроку

1. Робота в парах. Побудова графіків функцій, що мають похилі асимптоти.
2. Робота в малих групах. Дослідження кількості коренів рівнянь з параметрами.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку — формування умінь та навичок щодо дослідження багаточленів, дробово-раціональних функцій та побудови їхніх графіків. Дослідження кількості коренів рівняння з параметрами графічним методом.
- 2) Додаткова мета уроку — повторення границь, властивостей неперервних функцій, точок розриву, рівнянь асимптот, застосування першої та другої похідної функції.
- 3) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 4) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.

I. Робота в парах. Побудова графіків функцій, що мають похилі асимптоти

Асимптоти:

- вертикальні $x = x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} y(x) = \infty$;
- горизонтальні $y = y_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = y_0$ або аналогічна границя існує при $x \rightarrow +\infty$, або $x \rightarrow -\infty$;
- похилі $y = kx + b$, якщо існують границі $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$ і $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - kx)$ або аналогічні границі існують при $x \rightarrow +\infty$, або $x \rightarrow -\infty$.

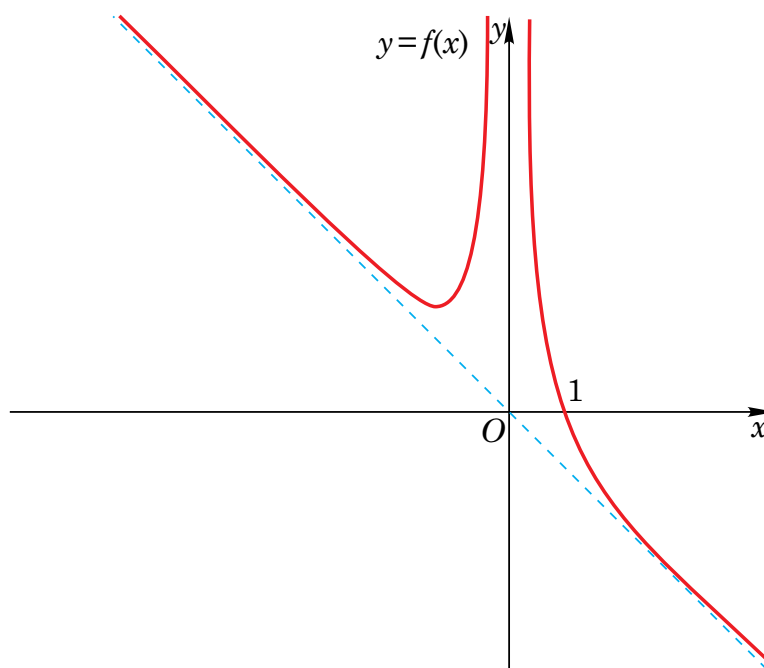
Завдання для роботи в парах.

1. Для функції $y = \frac{x}{x^2 - 25}$ знайдіть: область визначення, рівняння двох вертикальних та однієї горизонтальної асимптот. Перевірте отримані результати, побудувавши графік даної функції з використанням програми GeoGebra або іншої.
2. Для функції $y = \frac{(2x+1)^3}{(x+1)(x^2+x+1)}$ знайдіть: границю при $x \rightarrow \infty$, рівняння вертикальної та горизонтальної асимптот. Перевірте отримані результати, побудувавши графік даної функції з використанням програми GeoGebra або іншої.
3. Для функції $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{x^2 + x + 1}$ знайдіть:
 - а) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$;
 - б) $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - kx)$;
 - в) рівняння похилої асимптоти у вигляді $y = kx + b$.Перевірте отримані результати, побудувавши графік даної функції з використанням програми GeoGebra або іншої.
4. Для функції $y = f(x)$ знайдіть:
 - а) рівняння двох горизонтальних асимптот графіка функції $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$;
 - б) рівняння двох похилих асимптот графіка функції $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \frac{x}{x^2 + 1}$.Перевірте отримані результати, побудувавши графік даної функції з використанням програми GeoGebra або іншої.
5. Дослідіть властивості функції $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$ та побудуйте її графік. Побудуйте вертикальну та похилу асимптоти. Перевірте отримані результати з використанням програми GeoGebra або іншої.

Дослідження властивостей функції		
Етап дослідження	Функція $f(x) = \frac{1 - x^3}{x^2}$.	
Без похідної		
1. Область визначення функції.		
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.		
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.		
4. Проміжки знакосталості.		
5. Неперервність, точки розриву.		
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.		
З використанням похідної		
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.		
З використанням другої похідної		
8. Проміжки опуклості та точки перегину.		
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x	
	y'(x)	
	y''(x)	
	y(x)	

Дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Функція $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$.
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	

Графік побудовано на рисунку.



II. Робота в малих групах. Дослідження кількості коренів рівнянь з параметрами.

1. Кількість коренів рівняння $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ з параметром a дорівнює кількості точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з горизонтальною прямою, що задається рівнянням $y = a$.

2. При деяких значеннях параметру a графік функції $y = f(x)$ не перетинає пряму $y = a$. Тоді рівняння $f(x) = a$ не має дійсних коренів.
3. При деяких значеннях параметру a графік функції $y = f(x)$ перетинає пряму $y = a$ у нескінченній кількості точок (наприклад, на деякому проміжку графік функції збігається з частиною прямої), у цих випадках рівняння $f(x) = a$ має безліч коренів.

Таким чином, деякі етапи дослідження функцій при знаходженні кількості коренів рівняння з параметром можна пропустити, натомість обов'язковими залишаються ті з них, які пов'язані з областю визначення, поведінкою поблизу точок розриву, монотонністю та екстремумами, асимптотами графіка, множиною значень функції.

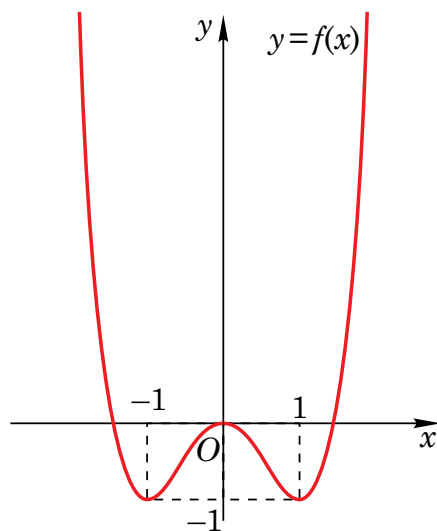
Завдання для роботи в малих групах

6. Використовуючи графік функції $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$, побудований на попередньому етапі уроку, знайдіть кількість розв'язків рівняння $\frac{1-x^3}{x^2} = a$ в залежності від значень параметру a .
7. Використовуючи графік функції $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$, побудований на попередньому етапі уроку, побудуйте графік функції $f(x) = \left| \frac{1-|x|^3}{x^2} \right|$. Знайдіть кількість розв'язків рівняння $\left| \frac{1-|x|^3}{x^2} \right| = a$ в залежності від значень параметру a .
8. Знайдіть кількість розв'язків рівняння $x^2(2x-3) = a$ в залежності від значень параметру a .
9. Знайдіть кількість розв'язків рівняння $x^3 - ax + 54 = 0$ в залежності від значень параметру a .

Вказівка. При $x \neq 0$ зведіть рівняння до виду $\frac{x^3 + 54}{x} = a$.

III. Самостійна робота

1. Використовуючи графік функції $y = f(x)$ (див. рисунок), знайдіть кількість розв'язків рівняння $f(x) = a$ в залежності від значень параметру a .



2. Знайдіть кількість розв'язків рівняння $2x^3 + 3x^2 = a$ в залежності від значень параметру a .
3. Відомо, що диференційовна на множині дійсних чисел функція $y = f(x)$ має властивості: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x \neq x_1$, $x \neq x_2$. Знайдіть кількість розв'язків рівняння $f(x) = a$ в залежності від значень параметру a .

IV. Додаткові завдання

Рівень А

1. Знайдіть кількість розв'язків рівняння $x^2(4 - x^2) = a$ в залежності від значень параметру a .
2. Знайдіть кількість розв'язків рівняння $(x^2 - 6)(3 - 2x) = a$ в залежності від значень параметру a .

Рівень В

1. При яких значеннях параметру a рівняння $x^3 - ax + 2a + 32 = 0$ має три різні корені? Перевірте отриманий результат, побудувавши графік функції $f(x) = \frac{x^3 + 32}{x - 2}$ з використанням програми GeoGebra або іншої.
2. Знайдіть кількість розв'язків рівняння $\sqrt{2 - x} + \sqrt{4 + x} = a$ в залежності від значень параметру a .

3. Визначте, при яких значеннях параметру a рівняння $\cos x + 1,5 \cos \frac{2x}{3} + 3 \cos \frac{x}{3} = a$ має дійсні розв'язки.

Рівень С

1. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{8(x^3 + x)}{(2x + 1)^3}$ та побудуйте її графік. Використайте його для того, щоби знайти кількість розв'язків рівняння $\frac{8(x^3 + x)}{(2x + 1)^3} = a$ в залежності від значень параметру a .
2. У залежності від значень параметру p знайдіть усі значення параметру a , при яких рівняння $2x^3 - 3px^2 + p = a$ має три різні корені.
- Вказівка.* Локальний максимум функції $y = 2x^3 - 3px^2 + p$ має бути додатним, а локальний мінімум — від'ємним.

V. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

- (+) що було зрозумілим:
-
-
- (-) що залишилося незрозумілим:
-
-
- (?) що здивувало або зацікавило:
-
-