

Урок 24. Урок–практикум. Застосування похідної у завданнях з параметрами

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в малих групах. Дослідження та розв'язування рівнянь і систем рівнянь з параметрами.
3. Робота в парах. Дослідження та доведення нерівностей з параметрами.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням/ученицям письмову перевірку відповідей до деяких пунктів дослідження функцій у нескладних номерах домашнього завдання. За необхідності зробіть аналіз якихось із запропонованих завдань.
- 2) Основна мета уроку — формування та закріплення умінь і навичок щодо дослідження функцій та його застосування у завданнях із параметрами.
- 3) Додаткова мета уроку — повторення властивостей першої та другої похідних функції.
- 4) Обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 5) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.

I. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Установіть відповідність між властивостями функцій (1–3) та відповідними числовими значеннями (А–Д).

Властивості функції

1 Кількість нулів функції $y = 2 \sin x - \cos 2x$ на проміжку $[0; 2\pi]$.

2 Найбільше ціле значення, якого набуває функція $y = x\sqrt{2-x}$.

3 Сума параметрів k і b для похилої асимптоти графіка функції $y = \frac{x^2}{x-2}$.

Числові значення

А 1

Б 2

В 3

Г 4

Д 5

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Б; 2 – А; 3 – В.

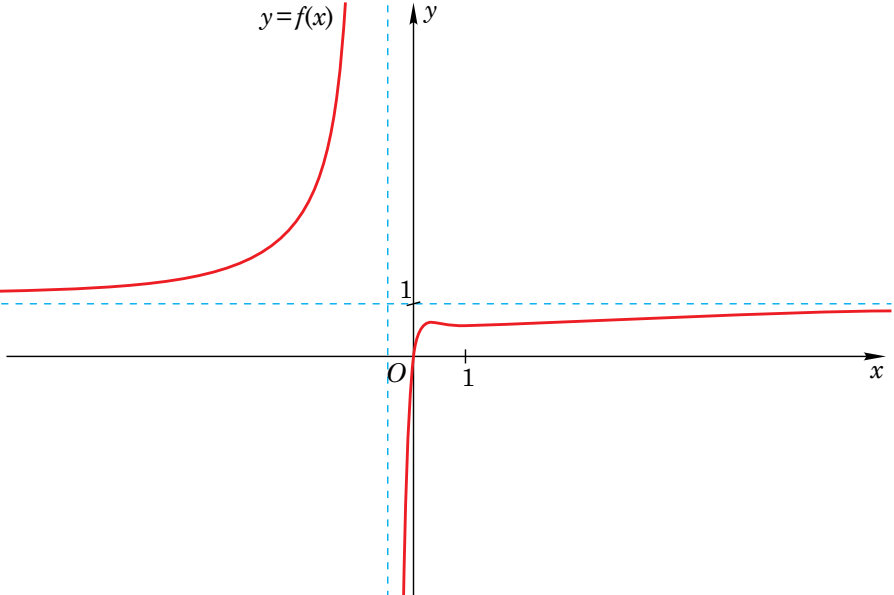
Задача для обговорення

2. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{8(x^3 + x)}{(2x+1)^3}$ та побудуйте її графік. Графік використайте

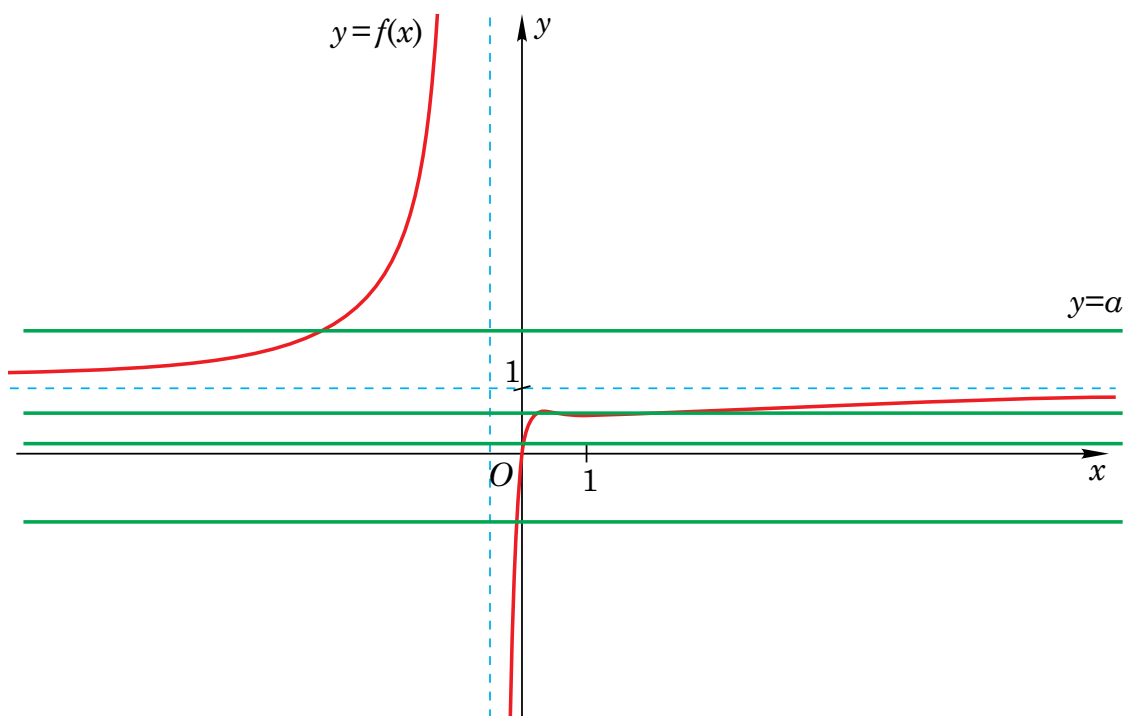
для знаходження кількості розв'язків рівняння $\frac{8(x^3 + x)}{(2x+1)^3} = a$ в залежності від значень параметру a .

Етап дослідження	Функція $f(x) = \frac{8(x^3 + x)}{(2x+1)^3}$
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	$D(f) = (-\infty; -0,5) \cup (-0,5; +\infty)$.
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	Область визначення не симетрична відносно 0. Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна.
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	$f(x) = \frac{8(x^3 + x)}{(2x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Точка перетину з осями координат: (0; 0).
4. Проміжки знакосталості.	$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -0,5) \cup (0; +\infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-0,5; 0)$.
5. Неперервність, точки розриву.	Функція неперервна на $(-\infty; -0,5) \cup (-0,5; +\infty)$. Точка розриву: $x = -0,5$.

Етап дослідження	Функція $f(x) = \frac{8(x^3 + x)}{(2x + 1)^3}$									
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: — вертикальні; — горизонтальні; — похилі.	Оскільки $\lim_{x \rightarrow -0,5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0,5-0} \frac{8(x^3 + x)}{(2x + 1)^3} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0,5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0,5+0} \frac{8(x^3 + x)}{(2x + 1)^3} = -\infty$, то пряма $x = -0,5$ є вертикальною асимптотою графіка. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{8(x^3 + x)}{(2x + 1)^3} = 1$, то пряма $y = 1$ є горизон- тальною асимптотою графіка. Похилих асимптот графік не має.									
З використанням похідної										
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	Якщо $f(x) = \frac{8(x^3 + x)}{(2x + 1)^3}$, то $f'(x) = \frac{8(x - 1)(3x - 1)}{(2x + 1)^4}$. Функція зростає на проміжках $(-\infty; -0,5); \left(-0,5; \frac{1}{3}\right]; [1; +\infty)$ та спадає на проміжку $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$. Тоді $x_{\max} = \frac{1}{3}, x_{\min} = 1, y_{\max} = \frac{16}{25}, y_{\min} = \frac{16}{27}$.									
З використанням другої похідної										
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	Оскільки $f'(x) = \frac{8(x - 1)(3x - 1)}{(2x + 1)^4}$, то $f''(x) = \frac{-48(x - 2)(2x - 1)}{(2x + 1)^5}$. Функція опукла вниз на проміжку $(-\infty; -0,5); [0,5; 2]$. Функція опукла вгору на проміжках $(-0,5; 0,5]; [2; +\infty)$. Точки перегину: $x = 2, x = 0,5$.									
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.										
x	$(-\infty; -0,5)$	$\left(-0,5; \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}; 0,5\right)$	$0,5$	$(0,5; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	+	0	—		—	0	+		+
$f''(x)$	+	—		—	0	+		+	0	—
$f(x)$	$\uparrow, \cup$	$\uparrow, \cap$	$\frac{16}{25}$	$\downarrow, \cap$		$\downarrow, \cup$	$\frac{16}{27}$	$\uparrow, \cup$		$\uparrow, \cap$
			max				min			

Етап дослідження	Функція $f(x) = \frac{8(x^3 + x)}{(2x + 1)^3}$
10. Графік функції.	
11. Множина значень функції.	$E(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Перетнемо графік функції прямими $y = a$ (див. рисунок).



Відповідь. Якщо $a = 1$, то рівняння не має коренів. Якщо $a \in \left(-\infty; \frac{16}{27}\right) \cup \left(\frac{16}{25}; 1\right) \cup (1; +\infty)$, то рівняння має один корінь. Якщо $a \in \left\{\frac{16}{27}, \frac{16}{25}\right\}$, то рівняння має два корені. Якщо $a \in \left(\frac{16}{27}; \frac{16}{25}\right)$, то рівняння має три корені.

II. Робота в малих групах. Дослідження та розв'язування рівнянь та систем рівнянь з параметрами

Задачі для роботи в малих групах

3. При яких дійсних значеннях параметру a сума обернених величин коренів рівняння $x^2 - (a+1)x + a^2 = 0$ буде найменшою? Заповніть пропуски у наведеному розв'язанні.

Розв'язання. Для того, щоби існували дійсні корені заданого квадратного рівняння, має виконуватися умова:

.....
.....
.....

Розглянемо тепер суму обернених величин коренів рівняння і врахуємо теорему

Вієта: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} =$

.....
.....
.....

Розглянемо тепер функцію $f(a) = \dots\dots\dots$ за умови

$a \in \dots\dots\dots$

Дослідимо її на монотонність та знайдемо найменше значення:

.....
.....
.....

Відповідь. $a = 1$.

4. Знайдіть невід'ємні значення параметру a , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a^3 - a^2 - 6a + 8,75, \\ \cos x \cdot \sin y = a^2 - 6a + 8,25 \end{cases} \text{ має розв'язки. Знайдіть ці розв'язки.}$$

Заповніть пропуски у наведеному розв'язанні.

Розв'язання. Розглянемо суму та різницю даних рівнянь, отримаємо рівносильну

систему:
$$\begin{cases} \sin(x+y) = a^3 - 12a + 17; \\ \sin(x-y) = a^3 - 2a^2 + 0,5. \end{cases}$$

Оскільки синус набуває значень від -1 до 1 , то

$$a^3 - 12a + 17 \in [-1; 1], a^3 - 2a^2 + 0,5 \in [-1; 1].$$

Розглянемо функцію $f(a) = a^3 - 12a + 17$ та знайдемо її проміжки монотонності та точки екстремуму при невід'ємних значеннях a :

.....
.....
.....

Звідси отримуємо, що $\min_{[0; +\infty)} f(a) = f(\dots) = 1$.

Але $f(a)$ має бути не більше за 1 . Таким чином, $f(a) = 1, a = \dots$

Тоді система набуває вигляду:
$$\begin{cases} \sin(x+y) = \dots; \\ \sin(x-y) = \dots. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

.....

Відповідь. Система має розв'язки лише при $a = \dots$, причому

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \pi k + \frac{\pi n}{2}, y = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \pi k - \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

- 5.** Знайдіть усі значення параметру a , при яких рівняння $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = a$ має рівно 2 розв'язки на відрізку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Заповніть пропуски у наведеному розв'язанні.

Розв'язання. Розглянемо рівносильне рівняння:

$$\sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = a \Leftrightarrow \cos 2x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 2a.$$

Оскільки $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $2x \in \dots$,

$\cos 2x \in \dots$

Нехай $\cos 2x = t$.

Розглянемо функцію $f(t) = \dots$ при

$t \in \dots$

Дослідимо властивості цієї функції та розв'яжемо графічно рівняння $f(t) = 2a$, зокрема, визначимо, у якому випадку воно має 2 розв'язки:

.....

Оскільки функція $t = \cos 2x$ монотонно спадає на $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, то кожне своє значення вона набуває точно 1 раз. Тому кількість розв'язків даного в умові рівняння на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ збігається із кількістю розв'язків рівняння $f(t) = 2a$ на проміжку

.....

Відповідь. $a \in \left(\frac{10-7\sqrt{7}}{108}; 0\right]$.

III. Робота в парах. Дослідження та доведення нерівностей з параметрами

Завдання для роботи в парах

- 6.** При яких значеннях параметру a нерівність $(x-a)^4 \leq 1-x$ має хоча б один розв'язок?

Вказівка. Розгляньте функцію $f(x) = (x - a)^4 + x$. Знайдіть ті значення параметру a , при яких найменше значення даної функції не перевищує 1.

Відповідь. $a \in (-\infty; 1,375]$.

Висновок. Дослідження функцій за допомогою похідної може стати основою для розв'язання рівнянь, нерівностей та систем рівнянь з параметрами.

IV. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть усі додатні значення параметру a , при яких сума кубів коренів рівняння $x^2 - ax + a + 1 = 0$ буде найменшою.
2. При яких значеннях параметру a рівняння $x^3 + ax + 2 = 0$ має три дійсні корені?

Рівень В

3. Знайдіть усі дійсні значення параметру a , при яких добуток коренів рівняння $(x + 2a)(x^2 - a^2 - 2a - 1) = 0$ менший від найменшого кореня цього рівняння.
4. Скільки розв'язків має рівняння $x^2 - 2ax - 1 = 0$ на проміжку $[-2; 2]$ в залежності від значення параметру a ?
5. При яких значеннях параметру a рівняння $\cos x + 0,5 \cos 2x - \frac{1}{3} \cos 3x = a$ має розв'язки?
6. Скільки розв'язків має рівняння $\frac{x^3 - 4}{(x - 1)^3} = a$ в залежності від значення параметру a ?

Рівень С

7. У залежності від значень параметру p знайдіть усі значення параметру a , при яких рівняння $x^3 + 2px^2 + p = a$ має три різні корені.
8. Для яких значень параметрів a і b графіки функцій $f(x) = 2x^4 - a^2x^2 + b - 1$ та $g(x) = 2ax^3 - 1$ мають точно дві спільних точки?

Вказівка. Знайдіть кількість нулів функції $h(x) = 2x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 + b$.

9. Знайдіть усі дійсні значення параметру a , при яких нерівність $x^2 + 1 \leq \sqrt{a|x| - 1}$ має розв'язки.
10. Визначте, як розміщені корені рівняння $ax^2 - 3(a + 1)x + 2a + 7 = 0$ відносно відрізка $[-1; 4]$.

Вказівка. Знайдіть розташування точок перетину графіка функції $f(x) = \frac{3x - 7}{x^2 - 3x + 2}$ з прямою виду $y = a$ відносно чисел -1 і 4 .

- 11.** Знайдіть усі дійсні значення параметру a , при яких система рівнянь
- $$\begin{cases} y = \sin(a + \pi x) + \sin(a - \pi x), \\ 3\sin a = \frac{1}{1+y^2} \left(\frac{3}{2} + x + \frac{1}{2x^2} \right) \end{cases}$$
- має єдиний розв'язок такий, що $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right)$, $y \in (-\infty; 0)$.

Вказівка. Знайдіть розташування точок перетину графіка функції $f(x) = \frac{3x-7}{x^2-3x+2}$ з прямою виду $y = a$ відносно чисел -1 і 4 .

- 12.** Знайдіть усі дійсні значення параметру a , при яких у множині розв'язків нерівності $x + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1$ міститься проміжок $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

V. Рефлексія (1–2 хв)

- | | | | |
|-----------|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю схему дослідження властивостей функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію знаходити кількість розв'язків рівняння з параметром виду $f(x) = a$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію застосовувати дослідження функцій для розв'язування рівнянь з параметрами та їхніх систем. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію застосовувати дослідження функцій для розв'язування нерівностей з параметрами. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію застосовувати графічний метод для розв'язування завдань з параметрами. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію як досліджувати функції для розв'язання завдань з параметрами. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |