

Урок 25. Урок—узагальнення теми: «Застосування похідної»

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите як досліджувати функцію на монотонність;
- 2) систематизуєте знання про обчислення точок екстремуму та екстремумів функції;
- 3) удосконалисте вміння знаходити найбільше і найменше значення функції на відрізку;
- 4) повторите дослідження функції на опуклість;
- 5) повторите як досліджувати функцію та будувати її графік;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть похідну функції $y = x^4 + 3 \cos x$. (ЗНО, 2009 р.).
2. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Визначте швидкість руху тіла в момент $t = 10$ с.
3. Знайдіть найбільше значення функції $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на проміжку $[-1; 1]$. (ЗНО, 2007 р.).
4. Розв'яжіть нерівність $x^2(x - 2) > 0$ і вкажіть кількість цілих розв'язків нерівності, які належать проміжку $[0; 5]$.
5. Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 + 6x$.

III. Дослідження функції на монотонність

Теорема. Ознака монотонності функції на інтервалі.

1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційовна та $f'(x) > 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є зростаючою.

2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційовна та $f'(x) < 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є спадною. Якщо функція є монотонною на інтервалі, а в одному чи обох кінцях інтервалу є неперервною, то така точка або точки можна приєднати до проміжку монотонності.

Зокрема:

1) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; b)$ і неперервною в точках a та b , то вона є монотонною на відрізку $[a; b]$;

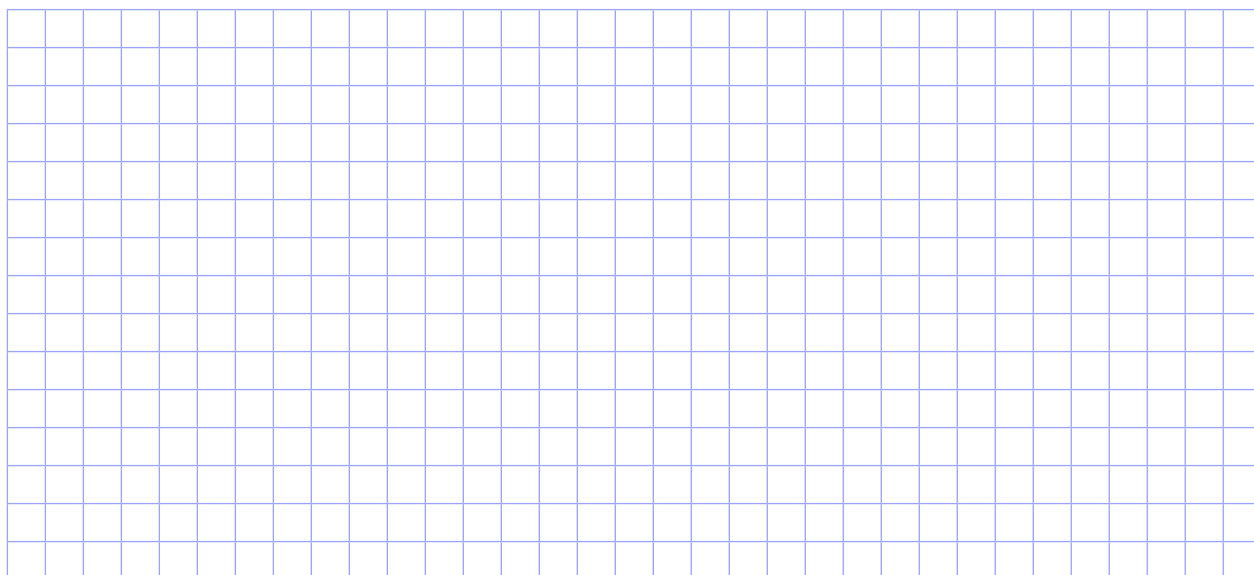
2) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; +\infty)$ або на інтервалі $(-\infty; b)$, і при цьому є неперервною в точці a (b), то вона є монотонною на інтервалі $[a; +\infty)$ або $(-\infty; b]$ відповідно.

Теорема. Властивість монотонної функції.

1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційовна та зростає, тоді $f'(x) \geq 0$ для будь-якої точки цього інтервалу.

2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційовна та спадає, тоді $f'(x) \leq 0$ для будь-якої точки цього інтервалу.

Приклад 1. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1-2x}{3+2x}$ на монотонність.



IV. Знаходження точок екстремуму функції

Означення. Внутрішня точка x_0 із області визначення функції $y = f(x)$ є критичною, якщо $f'(x_0) = 0$ або похідна не існує.

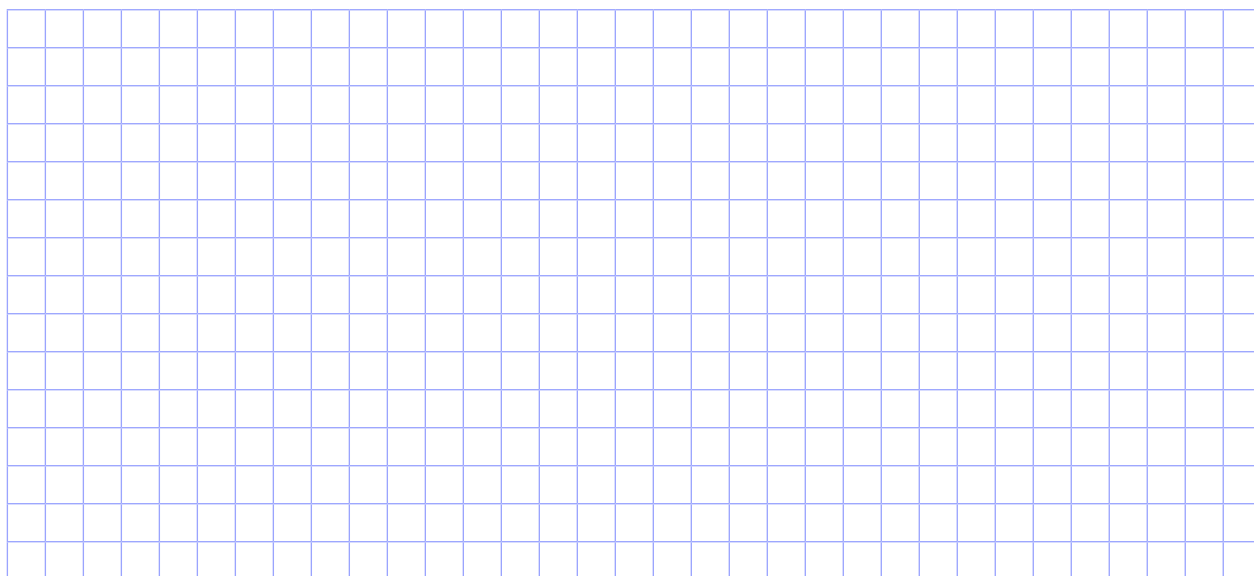
Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називають **стаціонарними точками**.

Теорема. Необхідна умова існування екстремуму в точці. Якщо x_0 — точка екстремуму функції, то вона є критичною, тобто або $f'(x_0) = 0$ або похідна функції не існує.

Схема дослідження функції на монотонність та екстремуми

1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.
2. Знайдіть похідну даної функції.
3. Знайдіть критичні точки даної функції, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ або точки, в яких похідна не існує.
4. Нанесіть критичні точки на $D(f)$ і визначте знаки похідної на кожному з утворених інтервалів.
5. Визначте проміжки монотонності даної функції, якщо похідна додатна, то функція зростає, якщо похідна від'ємна, то функція спадає.
6. Користуючись ознаками точок максимуму та мінімуму функції, визначте точки локального екстремуму. За необхідності знайдіть значення функції у цих точках (локальні екстремуми).

Приклад 2. Дослідіть функцію $y = 2\sqrt{x-1} - x + 1$ на монотонність та екстремуми.



V. Знаходження найбільших та найменших значень функції

Схема знаходження найбільшого (найменшого) значень неперервної функції на відрізку

1. Знайдіть критичні точки даної функції (похідна дорівнює нулю або не існує), що належать даному відрізку.
2. Знайдіть значення функції у всіх знайдених критичних точках та, окремо, на кінцях заданого відрізка.
3. Порівняйте знайдені значення функції та оберіть із них найбільше (найменше). Ці значення й будуть найбільшим (найменшим) значенням даної функції на відрізку.

Приклад 3. Серед прямокутників, вписаних у коло, знайдіть прямокутник найбільшої площі.

Розв'язання. Нехай сторони даного прямокутника дорівнюють x і y , а діаметр кола — $2R$.

За теоремою Піфагора маємо: $x^2 + y^2 = 4R^2$, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$.

Площа прямокутника дорівнює: $S = xy = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, де $x \in [0; 2R]$.

Знайдемо найбільше значення функції $S(x)$ на відрізку $[0; 2R]$:

$$S'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

$$S'(x) = 0, \text{ якщо } 4R^2 - 2x^2 = 0, 2x^2 = 4R^2, x^2 = 2R^2, x = R\sqrt{2}.$$

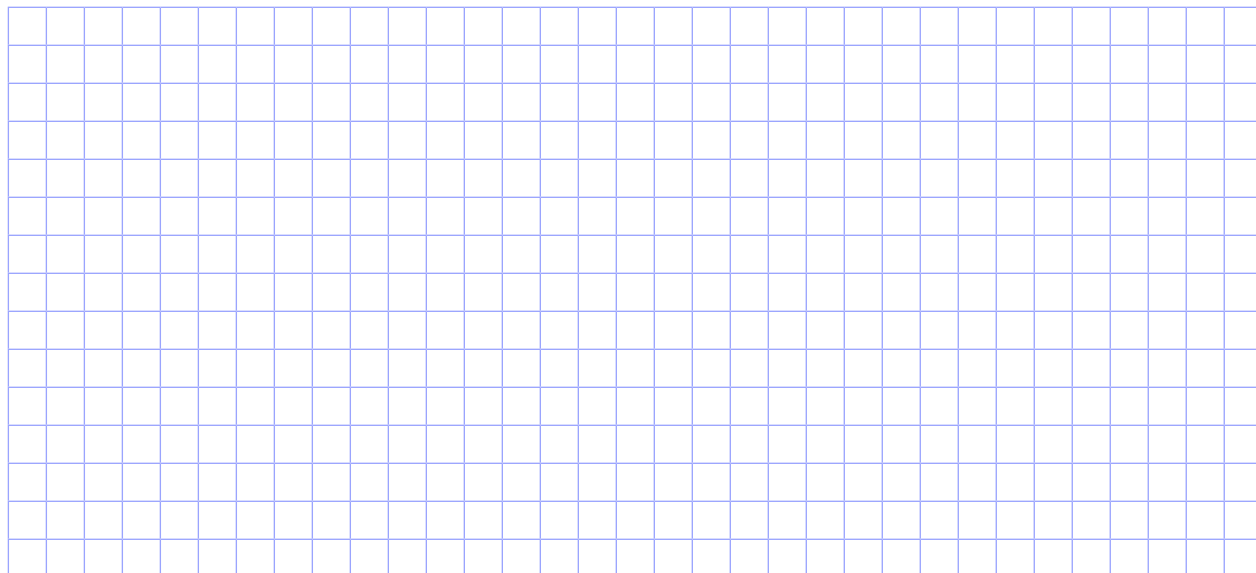
$$S(0) = 0, S(2R) = 0, S(R\sqrt{2}) = R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = 2R^2.$$

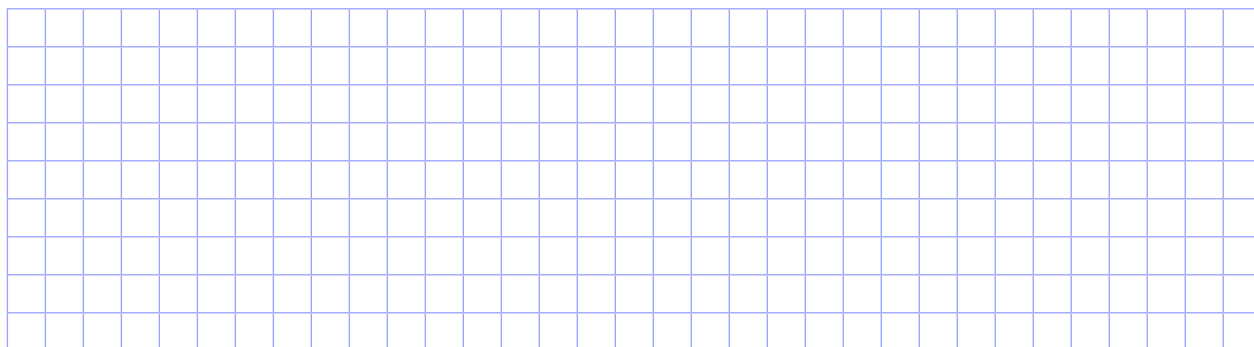
Отже, для $x = R\sqrt{2}$ функція $S(x)$ набуває найбільшого значення, що дорівнює $y = \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$.

Тому шуканий прямокутник є квадратом зі стороною $R\sqrt{2}$.

Відповідь. Квадрат зі стороною $R\sqrt{2}$.

Приклад 4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$ на відрізку $[-1; 4]$.





VII. Побудова графіків функцій

Схема дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	$D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	Область визначення симетрична відносно 0. Оскільки $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$, то функція $f(x)$ є непарною, її графік симетричний відносно початку координат.
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	Оскільки $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, то точка перетину з осями координат: $(0; 0)$.
4. Проміжки знакосталості.	Для $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ крива знаків: Тоді $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.
5. Неперервність, точки розриву.	Функція неперервна на $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Точки розриву: -2 і 2 .

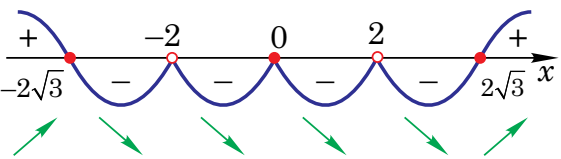
Схема дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Оскільки $\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$, то пряма $x = -2$ є вертикальною асимптотою графіка. Оскільки $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$, то графік функції не має горизонтальних асимптот. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} \right) = 1 = k$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{x^2 - 4} \right) = 0 = b$, то пряма $y = kx + b$, тобто $y = x$ є похилою асимптотою
3 використанням похідної	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	Для функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ похідна: $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 4) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2},$ $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{(x^2 - 4)^2}.$ Крива знаків для похідної:  Отже, $x_{\max} = -2\sqrt{3}$, $x_{\min} = 2\sqrt{3}$. Тоді $f_{\max} = -3\sqrt{3}$, $f_{\min} = 3\sqrt{3}$.

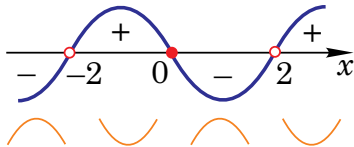
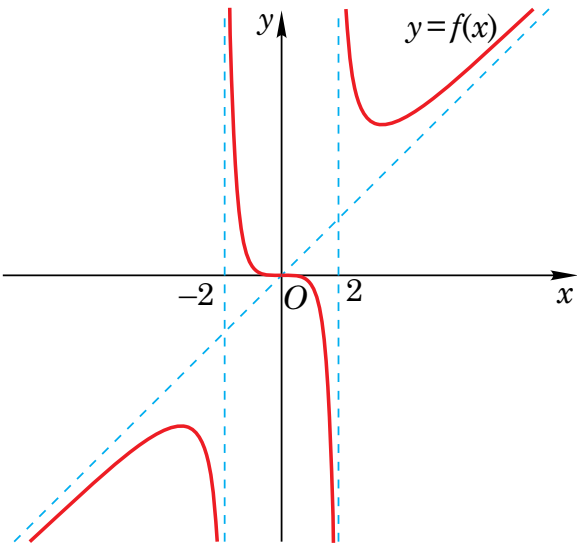
Схема дослідження властивостей функції																																																								
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.																																																							
З використанням другої похідної																																																								
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	Знайдемо другу похідну: $f''(x) = \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2 - 4)^2 - 4x \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{8x \cdot (x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}.$ Крива знаків для другої похідної:  Отже, $x = 0$ — точка перегину графіка функції.																																																							
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	<table><tr><th>x</th><td>$(-\infty; -2\sqrt{3})$</td><td>$-2\sqrt{3}$</td><td>$(-2\sqrt{3}; -2)$</td><td>$(-2; 0)$</td><td>0</td></tr><tr><th>$y'(x)$</th><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td></tr><tr><th>$y''(x)$</th><td>-</td><td></td><td>-</td><td>+</td><td>0</td></tr><tr><th>$y(x)$</th><td>$\uparrow, \cap$</td><td>$-3\sqrt{3}$</td><td>$\downarrow, \cap$</td><td>$\downarrow, \cup$</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td></td><td>max</td><td></td><td></td><td>$пер.$</td></tr></table> <table><tr><th>x</th><td>$(0; 2)$</td><td>$(2; 2\sqrt{3})$</td><td>$2\sqrt{3}$</td><td>$(2\sqrt{3}; +\infty)$</td></tr><tr><th>$y'(x)$</th><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><th>$y''(x)$</th><td>-</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr><tr><th>$y(x)$</th><td>$\downarrow, \cap$</td><td>$\downarrow, \cup$</td><td>$3\sqrt{3}$</td><td>$\uparrow, \cup$</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>min</td><td></td></tr></table>	x	$(-\infty; -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}; -2)$	$(-2; 0)$	0	$y'(x)$	+	0	-	-	0	$y''(x)$	-		-	+	0	$y(x)$	$\uparrow, \cap$	$-3\sqrt{3}$	$\downarrow, \cap$	$\downarrow, \cup$	0			max			$пер.$	x	$(0; 2)$	$(2; 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; +\infty)$	$y'(x)$	-	-	0	+	$y''(x)$	-	+		+	$y(x)$	$\downarrow, \cap$	$\downarrow, \cup$	$3\sqrt{3}$	$\uparrow, \cup$				min	
x	$(-\infty; -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}; -2)$	$(-2; 0)$	0																																																			
$y'(x)$	+	0	-	-	0																																																			
$y''(x)$	-		-	+	0																																																			
$y(x)$	$\uparrow, \cap$	$-3\sqrt{3}$	$\downarrow, \cap$	$\downarrow, \cup$	0																																																			
		max			$пер.$																																																			
x	$(0; 2)$	$(2; 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; +\infty)$																																																				
$y'(x)$	-	-	0	+																																																				
$y''(x)$	-	+		+																																																				
$y(x)$	$\downarrow, \cap$	$\downarrow, \cup$	$3\sqrt{3}$	$\uparrow, \cup$																																																				
			min																																																					
10. Графік функції.																																																								

Схема дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.
11. Множина значень функції.	$E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Зауважимо, що наведений план дослідження має рекомендаційний характер. Для побудови графіка функції упродовж дослідження важливо виявити такі властивості, що допоможуть коректно і раціонально здійснити побудову.

VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Закритий металевий контейнер із квадратним дном повинен мати об'єм 64 м^3 . За яких розмірів контейнера, а саме: довжини, ширини, висоти, на його виготовлення витратиться найменша кількість матеріалу?

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- Знайдіть проміжки зростання та спадання функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 36$.
- Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = 1 - 3x^2 - x^3$ на проміжку $[-1; 2]$.
- Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 16t - 2t^3$. Знайдіть її швидкість та прискорення в момент часу $t = 2$.
- Дослідіть функцію на монотонність і екстремуми:
1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$; 2) $y = -x^3 + 4x^2 - 3$; 3) $y = -x^3 + 4x - 3$; 4) $y = x^3 - 3x + 2$.
- Дослідіть функцію $f(x) = -2x^3 + x^2 - 3x + 5$ на опуклість і точки перегину.
- Дослідіть функцію і побудуйте її графік:
1) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; 2) $y = \frac{-2}{x^2 + 4}$.

Рівень В

- Знайдіть екстремуми функції $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2$.
- Розкладіть число 10 на два невід'ємні цілі доданки так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.
- Тіло з масою 5 кг рухається прямолінійно за законом $s(t) = 4t^3 - 3t^2 + 10t$. Знайдіть кінетичну енергію тіла та силу, яка на нього діє в момент часу $t = 2$, де t — час (у секундах), s — переміщення (у метрах).
- Знайдіть проміжки зростання та спадання функції $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

- 5.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції на відрізку:
- 1) $y = (x-1)^3 + 4$, $[-2; 1]$;
 - 2) $y = 7 - (2x-8)^4$, $[-1; 3]$;
 - 3) $y = 5 - (3x+6)$, $[-2; 0]$;
 - 4) $y = 2(x+3)^6 - 4$, $[-1; 2]$.
- 6.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції на відрізку:
- 1) $y = \operatorname{ctg} x + x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$;
 - 2) $y = 2 \sin x - x$, $[0; \pi]$.
- 7.** На сторінці книжки друкований текст повинен займати площу 432 см^2 . Поля зверху і знизу мають бути по 2 см , а справа і зліва — по $1,5 \text{ см}$. Обчисліть найекономічніші розміри паперу за таких умов.
- 8.** Дослідіть функцію на екстремуми:
- 1) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$;
 - 2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;
 - 3) $f(x) = x^2(1-x)$;
 - 4) $f(x) = x^3 \left(1 + \frac{x}{4}\right)$.
- 9.** Дослідіть функцію на опуклість і точки перегину:
- 1) $y = x^4 - 6x^2 + 4$;
 - 2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 8x$;
 - 3) $y = 2x - \frac{1}{3x}$;
 - 4) $y = 3x^2 - \frac{16}{x^2}$.
- 10.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
- 1) $y = \frac{x^2 + x + 3}{x + 1}$;
 - 2) $y = \frac{2x^2 + 4x - 1}{x - 2}$.
- 11.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
- 1) $y = x^4 - 2x^2 + 5$;
 - 2) $y = x^4 - 6x^2 + 9$.
- 12.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
- 1) $y = \frac{\sin x}{x}$;
 - 2) $y = \frac{\cos x}{x}$.

Рівень С

- 1.** Дослідіть функцію на опуклість і точки перегину:
- 1) $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 4$;
 - 2) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.
- 2.** Витрати на паливо, необхідне для руху океанського лайнера, пропорційні кубу його швидкості і складають 20 у. о. за годину при швидкості 10 вузлів , а інші витрати — 100 у. о. за годину. Знайдіть економнішу швидкість руху лайнера, за умов тихої погоди на відстань $1000 \text{ морських миль}$.
- Примітка.* $1 \text{ вузол} = 1 \text{ морська миля за годину}$, $1 \text{ морська миля} = 1852 \text{ м}$.
- 3.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції на відрізку:
- 1) $y = x^3 - 2x|x-2|$, $[-1; 3]$;
 - 2) $y = 3x|x+1| - x^3$, $[-1; 2]$.
- 4.** При якому значенні параметра a найменше значення функції $y = x\sqrt{x+a}$ дорівнює $-6\sqrt{3}$?
- 5.** Зрошувальний канал має форму рівнобічної трапеції, бічні сторони якої дорівнюють меншій основі. Під яким кутом нахилу бічних сторін переріз каналу буде мати максимальну площу?

- 6.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
- 1) $y = 2 \sin x + \sin 2x$; 2) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.
- 7.** *Творче завдання.* Розробіть презентацію на тему: «Типові помилки при застосуванні похідної та як їх уникнути».

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію

- 4) Найскладнішим для мене було

- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності

- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Використання похідної для знаходження оптимальних розмірів геометричних фігур.
2. Застосування похідної в задачах на рух (швидкість і прискорення).
3. Задачі оптимізації витрат матеріалів у виробництві.
4. Похідна в економіці: граничні витрати та граничний дохід.
5. Використання комп'ютерних програм для дослідження функцій.

