

Урок 25. Урок–узагальнення теми: «Застосування похідної»

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації.

План уроку

1. Дослідження функції на монотонність.
2. Знаходження точок екстремуму функції.
3. Знаходження найбільших та найменших значень функції.
4. Дослідження опуклості функцій.
5. Побудова графіків функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Увесь обсяг матеріалу неможливо охопити за один урок, тому обирайте теми та приклади з урахуванням доцільності та рівня знань учнів/учениць.
- 2) На початку уроку запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання.
- 3) Для повторення та узагальнення запропонуйте учням/ученицям приклади на повторення, які допоможуть згадати раніше вивчений матеріал.
- 4) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання) на початку уроку. Запропонуйте її розв'язати наприкінці уроку у формі групової роботи.
- 5) Подавайте теоретичний матеріал стисло та структуровано. Пропонуйте учням/ученицям самостійно заповнювати таблиці для систематизації знань.

- 6) До кожного теоретичного положення наводьте ілюстративні приклади. Обирайте їх на власний розсуд. За можливості пропонуйте приклади для самостійної роботи учнів/учениць.
- 7) Акцентуйте увагу учнів/учениць на важливості створення проєктів, які можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.
- 8) Резервний час на уроці можна присвятити захисту проєктів, обговоренню і демонстрації виконаних робіт.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи можна за допомогою похідної оптимізувати витрати або прибуток?
- 2) У яких ситуаціях похідну складно застосувати?
- 3) Яке застосування похідної здалося вам найцікавішим? Де, на вашу думку, ви могли б використати ці знання поза уроками математики?
- 4) Чи можна візуалізувати похідну на графіку функції?
- 5) Чому інженери та економісти активно використовують похідні у своїй роботі?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть похідну функції $y = x^4 + 3 \cos x$. (ЗНО, 2009 р.).
Відповідь. $y' = 4x^3 - 3 \sin x$.
2. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Визначте швидкість руху тіла в момент $t = 10$ с.
Відповідь. 164 м/с.
3. Знайдіть найбільше значення функції $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на проміжку $[-1; 1]$. (ЗНО, 2007 р.).
Відповідь. 2.
4. Розв'яжіть нерівність $x^2(x - 2) > 0$ і вкажіть кількість цілих розв'язків нерівності, які належать проміжку $[0; 5]$.
Відповідь. Три.
5. Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 + 6x$.
Відповідь. 9.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Закритий металевий контейнер із квадратним дном повинен мати об'єм 64 м^3 . За яких розмірів контейнера, а саме: довжини, ширини, висоти, на його виготовлення витратиться найменша кількість матеріалу?

III. Дослідження функції на монотонність

Теорема. Ознака монотонності функції на інтервалі.

1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційовна та $f'(x) > 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є зростаючою.

2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційовна та $f'(x) < 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є спадною. Якщо функція є монотонною на інтервалі, а в одному чи обох кінцях інтервалу є неперервною, то така точка або точки можна приєднати до проміжку монотонності.

Зокрема:

1) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; b)$ і неперервною в точках a та b , то вона є монотонною на відрізку $[a; b]$;

2) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; +\infty)$ або на інтервалі $(-\infty; b)$, і при цьому є неперервною в точці a (b), то вона є монотонною на інтервалі $[a; +\infty)$ або $(-\infty; b]$ відповідно.

Теорема. Властивість монотонної функції.

1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційовна та зростає, тоді $f'(x) \geq 0$ для будь-якої точки цього інтервалу.

2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційовна та спадає, тоді $f'(x) \leq 0$ для будь-якої точки цього інтервалу.

Ілюстративні приклади

6. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1-2x}{3+2x}$ на монотонність.

Розв'язання. Дана функція визначена та є диференційованою на множині $(-\infty; -1,5) \cup (-1,5; +\infty)$. Знайдемо її похідну:

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot (3+2x) - (1-2x) \cdot 2}{(3+2x)^2} = \frac{-6-4x-2+4x}{(3+2x)^2} = \frac{-8}{(3+2x)^2}.$$

Оскільки $f'(x) < 0$, то функція $f(x) = \frac{1-2x}{3+2x}$ спадає на всій області визначення:

$(-\infty; -1,5)$ і $(-1,5; +\infty)$

Відповідь. Функція спадає на інтервалах $(-\infty; -1,5)$ і $(-1,5; +\infty)$.

7. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}$ на монотонність.

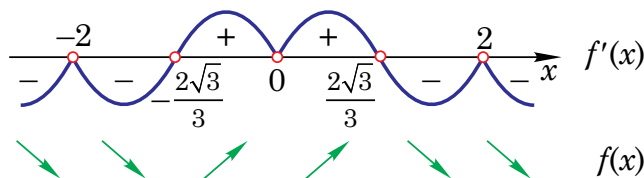
Розв'язання. Функція визначена та є диференційовною на множині

$(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$. Знайдемо її похідну: $f'(x) = \frac{-16(4-3x^2)}{x^2(4-x^2)^2}$.

Знайдемо нулі похідної та визначимо проміжки знакосталості, використовуючи метод інтервалів.

$$4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3}x)(2 + \sqrt{3}x) = 0; \quad x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Крива знаків для похідної функції:



За ознакою монотонності функції отримуємо чотири інтервали, на яких функція спадає: $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\right)$, $(2; +\infty)$ та два інтервали, на яких функція зростає:

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right) \text{ і } \left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Оскільки функція $f(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}$ є неперервною в точках $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ та $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, то остаточно отримуємо:

- функція зростає на проміжках $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$, $\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$;
- функція спадає на проміжках $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$, $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\right)$, $(2; +\infty)$.

Відповідь. функція зростає на проміжках $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$, $\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Функція спадає на проміжках $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$, $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\right)$, $(2; +\infty)$.

IV. Знаходження точок екстремуму функції

Означення. Внутрішня точка x_0 із області визначення функції $y = f(x)$ є критичною, якщо $f'(x_0) = 0$ або похідна не існує.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називають **стаціонарними точками**.

Теорема. Необхідна умова існування екстремуму в точці. Якщо x_0 — точка екстремуму функції, то вона є критичною, тобто або $f'(x_0) = 0$ або похідна функції не існує.

Схема дослідження функції на монотонність та екстремуми

1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.
2. Знайдіть похідну даної функції.
3. Знайдіть критичні точки даної функції, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ або точки, в яких похідна не існує.
4. Нанесіть критичні точки на $D(f)$ і визначте знаки похідної на кожному з утворених інтервалів.
5. Визначте проміжки монотонності даної функції, якщо похідна додатна, то функція зростає, якщо похідна від'ємна, то функція спадає.
6. Користуючись ознаками точок максимуму та мінімуму функції, визначте точки локального екстремуму. За необхідності знайдіть значення функції у цих точках (локальні екстремуми).

Ілюстративний приклад

8. Дослідіть функцію $y = 2\sqrt{x-1} - x + 1$ на монотонність та екстремуми.

Розв'язання. Область визначення функції: $D(y) = [1; +\infty)$.

Знайдемо похідну: $y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1$.

Критичні точки:

$$y' = 0, \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1, \sqrt{x-1} = 1, x = 2.$$

Отже, $x = 2$ — критична точка функції.

Інших критичних точок функція не має.

Якщо $1 < x < 2$, то $y' > 0$, якщо $x > 2$, то $y' < 0$.

Отже, функція зростає на проміжку $(1; 2)$ і спадає на проміжку $(2; +\infty)$.

Тоді $x = 2$ — точка максимуму функції, $y_{\max} = y(2) = 2\sqrt{1} - 2 + 1 = 1$.

Оскільки функція $y = 2\sqrt{x-1} - x + 1$ є неперервною в точках $x = 1$ та $x = 2$, то $[1; 2]$ — проміжок зростання, $[2; +\infty)$ — проміжок спадання.

Відповідь. Функція зростає на проміжку $[1; 2]$, спадає на проміжках $[2; +\infty)$; $x_{\max} = 2$, $y_{\max} = 1$.

V. Знаходження найбільших та найменших значень функції

Схема знаходження найбільшого (найменшого) значень неперервної функції на відрізку

1. Знайдіть критичні точки даної функції (похідна дорівнює нулю або не існує), що належать даному відрізку.
2. Знайдіть значення функції у всіх знайдених критичних точках та, окремо, на кінцях заданого відрізка.
3. Порівняйте знайдені значення функції та оберіть із них найбільше (найменше). Ці значення й будуть найбільшим (найменшим) значенням даної функції на відрізку.

Ілюстративні приклади

9. Серед прямокутників, вписаних у коло, знайдіть прямокутник найбільшої площі.
Розв'язання. Нехай сторони даного прямокутника дорівнюють x і y , а діаметр кола — $2R$.

За теоремою Піфагора маємо: $x^2 + y^2 = 4R^2$, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$.

Площа прямокутника дорівнює: $S = xy = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, де $x \in [0; 2R]$.

Знайдемо найбільше значення функції $S(x)$ на відрізку $[0; 2R]$:

$$S'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

$$S'(x) = 0, \text{ якщо } 4R^2 - 2x^2 = 0, 2x^2 = 4R^2, x^2 = 2R^2, x = R\sqrt{2}.$$

$$S(0) = 0, S(2R) = 0, S(R\sqrt{2}) = R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = 2R^2.$$

Отже, для $x = R\sqrt{2}$ функція $S(x)$ набуває найбільшого значення, що дорівнює $y = \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$.

Тому шуканий прямокутник є квадратом зі стороною $R\sqrt{2}$.

Відповідь. Квадрат зі стороною $R\sqrt{2}$.

10. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$ на відрізку $[-1; 4]$.

Розв'язання. Знайдемо похідну: $f'(x) = 6x^2 - 18x$.

Знайдемо критичні точки: $6x^2 - 18x = 0$, $6x(x - 3) = 0$, $x = 0$ або $x = 3$.

Точки $x = 0$ і $x = 3$ належать проміжку $[-1; 4]$.

Знайдемо значення функції у критичних точках і на кінцях відрізка:

$$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 - 3 = -3,$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 - 3 = -30,$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 - 3 = -14,$$

$$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 9 \cdot 4^2 - 3 = -19.$$

Найбільше значення функції на відрізку $[-1; 4]$ дорівнює 3.

Найменше значення функції на відрізку $[-1; 4]$ дорівнює -30.

Відповідь. 3; -30.

VI. Дослідження опуклості функцій

Геометричний зміст похідної функції

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x_0 . Тоді $f'(x)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка $f(x)$ в цій точці до додатного напрямку осі абсцис.

Геометричний зміст другої похідної

1) Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I , причому $f''(x) \geq 0$ для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на проміжку I .

2) Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I , причому $f''(x) \leq 0$ для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на проміжку I .

Означення. Точка x_0 називається **точкою перегину** функції $y = f(x)$, якщо дотична до графіка у точці $(x_0; f(x_0))$ переходить з одного боку дотичної на інший.

Це означає, що у точці перегину напрямок опуклості функції змінюється. На рисунку при $x \leq x_0$ функція опукла вгору, а при $x \geq x_0$ функція опукла вниз.

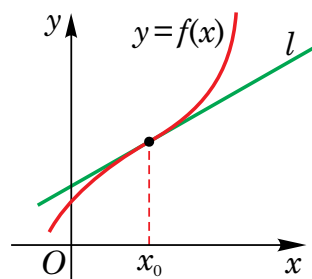


Схема дослідження функції на опуклість та точки перегину

1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.
2. Знайдіть другу похідну даної функції та формальну область її визначення $D(f'')$.
3. Знайдіть корені рівняння $f''(x) = 0$.
4. Нанесіть знайдені корені на спільну частину $D(f)$ та $D(f'')$ і визначте знаки другої похідної на кожному з утворених інтервалів.
5. Користуючись ознаками опуклості функції вниз ($f''(x) \geq 0$) і вгору ($f''(x) \leq 0$), визначте проміжки опуклості даної функції. Користуючись достатньою умовою, визначте точки перегину.
6. Запишіть у відповідь:
 - проміжки опуклості вниз даної функції, розділяючи їх крапкою з комою;
 - проміжки опуклості вгору даної функції, розділяючи їх крапкою з комою;
 - точки перегину.

Ілюстративні приклади

- 11.** Знайдіть інтервали опуклості та точки перегину графіка функції

$$y = x^4 - 2x^3 - 72x^2 + 3x + 4.$$

Розв'язання. Оскільки область визначення функції є множина дійсних чисел, то функція є неперервною й диференційовною на множині дійсних чисел.

Знайдемо першу та другу похідні функції: $y' = 4x^3 - 6x^2 - 144x + 3$,

$$y'' = 12x^2 - 12x - 144.$$

Розв'яжемо рівняння $12x^2 - 12x - 144 = 0$. Його корені $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

Знайдені числа розбивають область визначення функції на три інтервали знакосталості другої похідної: $(-\infty; -3]$, $[-3; 4]$, $[4; +\infty)$.

Якщо $x \in (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$, то $f''(x) \geq 0$, тому графік функції опуклий униз на цих інтервалах.

Якщо $x \in [-3; 4]$, то $f''(x) \leq 0$, тому графік функції опуклий угору на цьому інтервалі.

Оскільки при переході через точки $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ друга похідна змінює свій знак, то ці точки є точками перегику графіка.

Відповідь. Якщо $x \in (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$, то графік функції опуклий униз. Якщо $x \in [-3; 4]$, то графік функції опуклий угору. Точки $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ — точки перегику графіка функції.

12. Знайдіть інтервали опуклості та точки перегику графіка функції $y = x\sqrt{4x - x^2}$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції:

$$y' = 1 \cdot \sqrt{4x - x^2} + x \cdot \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \sqrt{4x - x^2} + \frac{2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{4x - x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{6x - 2x^2}{\sqrt{4x - x^2}}.$$

Знайдемо другу похідну:

$$y'' = \frac{(6 - 4x)\sqrt{4x - x^2} - (6x - 2x^2) \cdot \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}}{4x - x^2} = \frac{2x((3 - 2x)(4 - x) - (3 - x)(-x))}{(4x - x^2)\sqrt{4x - x^2}} =$$

$$= \frac{2x(12 - 3x - 8x + 2x^2 - 6 + 3x + 2x - x^2)}{(4x - x^2)\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2x(x^2 - 6x + 6)}{(4x - x^2)\sqrt{4x - x^2}}.$$

$y'' = 0$, $2x(x^2 - 6x + 6) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3 - \sqrt{3}$, $x_3 = 3 + \sqrt{3}$, x_1 і x_3 — сторонні корені рівняння.

Якщо $0 < x < 3 - \sqrt{3}$, то $y'' > 0$. Якщо $3 - \sqrt{3} < x < 4$, то $y'' < 0$.

Отже, $x = 3 - \sqrt{3}$ є абсцисою точки перегику.

Відповідь. Якщо $x \in (-\infty; 3 - \sqrt{3}]$, то графік функції опуклий униз. Якщо $x \in [3 - \sqrt{3}; 4]$, то графік функції опуклий угору. Точка $x = 3 - \sqrt{3}$ — точка перегику графіка функції.

VII. Побудова графіків функцій

Схема дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.
<i>Без похідної</i>	
1. Область визначення функції.	$D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

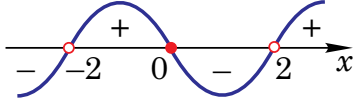
Схема дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.
2. Парність/непарність, періодичність та інші особливості.	Область визначення симетрична відносно 0. Оскільки $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$, то функція $f(x)$ є непарною, її графік симетричний відносно початку координат. 
3. Нулі функції, точки перетину графіка з осями координат.	Оскільки $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, то точка перетину з осями координат: $(0; 0)$.
4. Проміжки знакосталості.	Для $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ крива знаків: Тоді $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.
5. Неперервність, точки розриву.	Функція неперервна на $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Точки розриву: -2 і 2.
6. Поведінка функції поблизу точок розриву та на нескінченності. Асимптоти: вертикальні, горизонтальні, похилі.	Оскільки $\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$, то пряма $x = -2$ є вертикальною асимптотою графіка. Оскільки $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$, то графік функції не має горизонтальних асимптот. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} \right) = 1 = k$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{x^2 - 4} \right) = 0 = b$, то пряма $y = kx + b$, тобто $y = x$ є похилою асимптотою

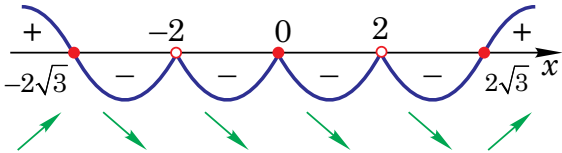
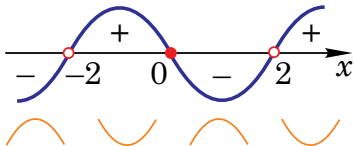
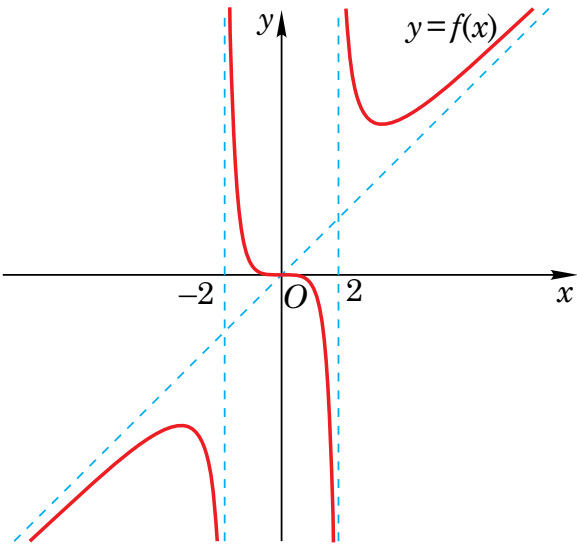
Схема дослідження властивостей функції	
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.
З використанням похідної	
7. Проміжки монотонності. Точки екстремуму та екстремуми.	Для функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ похідна: $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 4) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2},$ $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{(x^2 - 4)^2}.$ Крива знаків для похідної:  Отже, $x_{\max} = -2\sqrt{3}$, $x_{\min} = 2\sqrt{3}$. Тоді $f_{\max} = -3\sqrt{3}$, $f_{\min} = 3\sqrt{3}$.
З використанням другої похідної	
8. Проміжки опуклості та точки перегину.	Знайдемо другу похідну: $f''(x) = \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2 - 4)^2 - 4x \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{8x \cdot (x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}.$ Крива знаків для другої похідної:  Отже, $x = 0$ — точка перегину графіка функції.

Схема дослідження властивостей функції						
Етап дослідження	Приклад, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.					
9. Таблиця властивостей функції та її похідних.	x	$(-\infty; -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}; -2)$	$(-2; 0)$	0
	$y'(x)$	+	0	-	-	0
	$y''(x)$	-		-	+	0
	$y(x)$	$\uparrow, \cap$	$-3\sqrt{3}$	$\downarrow, \cap$	$\downarrow, \cup$	0
			max			$пер.$
	x	$(0; 2)$	$(2; 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; +\infty)$	
	$y'(x)$	-	-	0	+	
	$y''(x)$	-	+		+	
	$y(x)$	$\downarrow, \cap$	$\downarrow, \cup$	$3\sqrt{3}$	$\uparrow, \cup$	
				min		
10. Графік функції.						
11. Множина значень функції.	$E(f) = (-\infty; +\infty)$.					

Зауважимо, що наведений план дослідження має рекомендаційний характер. Для побудови графіка функції упродовж дослідження важливо виявити такі властивості, що допоможуть коректно і раціонально здійснити побудову.

VIII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Закритий металевий контейнер із квадратним дном повинен мати об'єм 64 м^3 . За яких розмірів контейнера, а саме: довжини, ширини, висоти, на його виготовлення витратиться найменша кількість матеріалу?

Розв'язання. Нехай сторона основи контейнера (прямокутного паралелепіпеда) дорівнює a , тоді його висота становить $b = \frac{64}{a^2}$.

$$S_{\text{п}} = 2a^2 + 4ab = 2a^2 + 4a \cdot \frac{64}{a^2} = 2\left(a^2 + \frac{128}{a}\right).$$

$$S'(a) = 2\left(2a - \frac{128}{a^2}\right) = \frac{4(a^3 - 64)}{a^2}, \quad a^3 - 64 = 0, \quad a = 4.$$

Функція $S(a)$ в точці 4 набуває свого найменшого значення.

Отже, $a = 4$, $b = 4$. Тобто, паралелепіпед — куб.

Відповідь. 4, 4, 4.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 36$.
2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = 1 - 3x^2 - x^3$ на проміжку $[-1; 2]$.
3. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 16t - 2t^3$. Знайдіть її швидкість та прискорення в момент часу $t = 2$.
4. Дослідіть функцію на монотонність і екстремуми:
1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$; 2) $y = -x^3 + 4x^2 - 3$; 3) $y = -x^3 + 4x - 3$; 4) $y = x^3 - 3x + 2$.
5. Дослідіть функцію $f(x) = -2x^3 + x^2 - 3x + 5$ на опуклість і точки перегину.
6. Дослідіть функцію і побудуйте її графік:
1) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; 2) $y = \frac{-2}{x^2 + 4}$.

Рівень В

1. Знайдіть екстремуми функції $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2$.
2. Розкладіть число 10 на два невід'ємні цілі доданки так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.
3. Тіло з масою 5 кг рухається прямолінійно за законом $s(t) = 4t^3 - 3t^2 + 10t$. Знайдіть кінетичну енергію тіла та силу, яка на нього діє в момент часу $t = 2$, де t — час (у секундах), s — переміщення (у метрах).
4. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

- 5.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції на відрізку:
- 1) $y = (x-1)^3 + 4$, $[-2; 1]$;
 - 2) $y = 7 - (2x-8)^4$, $[-1; 3]$;
 - 3) $y = 5 - (3x+6)$, $[-2; 0]$;
 - 4) $y = 2(x+3)^6 - 4$, $[-1; 2]$.
- 6.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції на відрізку:
- 1) $y = \operatorname{ctg} x + x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$;
 - 2) $y = 2 \sin x - x$, $[0; \pi]$.
- 7.** На сторінці книжки друкований текст повинен займати площу 432 см^2 . Поля зверху і знизу мають бути по 2 см , а справа і зліва — по $1,5 \text{ см}$. Обчисліть найекономічніші розміри паперу за таких умов.
- 8.** Дослідіть функцію на екстремуми:
- 1) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$;
 - 2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;
 - 3) $f(x) = x^2(1-x)$;
 - 4) $f(x) = x^3 \left(1 + \frac{x}{4}\right)$.
- 9.** Дослідіть функцію на опуклість і точки перегину:
- 1) $y = x^4 - 6x^2 + 4$;
 - 2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 8x$;
 - 3) $y = 2x - \frac{1}{3x}$;
 - 4) $y = 3x^2 - \frac{16}{x^2}$.
- 10.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
- 1) $y = \frac{x^2 + x + 3}{x + 1}$;
 - 2) $y = \frac{2x^2 + 4x - 1}{x - 2}$.
- 11.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
- 1) $y = x^4 - 2x^2 + 5$;
 - 2) $y = x^4 - 6x^2 + 9$.
- 12.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
- 1) $y = \frac{\sin x}{x}$;
 - 2) $y = \frac{\cos x}{x}$.

Рівень С

- 1.** Дослідіть функцію на опуклість і точки перегину:
- 1) $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 4$;
 - 2) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.
- 2.** Витрати на паливо, необхідне для руху океанського лайнера, пропорційні кубу його швидкості і складають 20 у. о. за годину при швидкості 10 вузлів , а інші витрати — 100 у. о. за годину. Знайдіть економнішу швидкість руху лайнера, за умов тихої погоди на відстань $1000 \text{ морських миль}$.
- Примітка.* $1 \text{ вузол} = 1 \text{ морська миля за годину}$, $1 \text{ морська миля} = 1852 \text{ м}$.
- 3.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції на відрізку:
- 1) $y = x^3 - 2x|x-2|$, $[-1; 3]$;
 - 2) $y = 3x|x+1| - x^3$, $[-1; 2]$.
- 4.** При якому значенні параметра a найменше значення функції $y = x\sqrt{x+a}$ дорівнює $-6\sqrt{3}$?
- 5.** Зрошувальний канал має форму рівнобічної трапеції, бічні сторони якої дорівнюють меншій основі. Під яким кутом нахилу бічних сторін переріз каналу буде мати максимальну площу?

- 6.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
- 1) $y = 2 \sin x + \sin 2x$; 2) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.
- 7.** *Творче завдання.* Розробіть презентацію на тему: «Типові помилки при застосуванні похідної та як їх уникнути».

Х. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію

- 4) Найскладнішим для мене було

- 5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності

- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Використання похідної для знаходження оптимальних розмірів геометричних фігур.
2. Застосування похідної в задачах на рух (швидкість і прискорення).
3. Задачі оптимізації витрат матеріалів у виробництві.
4. Похідна в економіці: граничні витрати та граничний дохід.
5. Використання комп'ютерних програм для дослідження функцій.