

Урок 27. Підсумковий урок з теми: «Застосування похідної»

Тип уроку: урок корекції знань.

План уроку

1. Аналіз контрольної роботи.
2. Корегування знань учнів. Розв'язування задач за результатами контрольної роботи.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями [12 МАО 2.4.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Урок спрямований на аналіз підсумкової контрольної роботи за результатами вивчення теми 1 та на корегування знань учнів/учениць із цієї теми.
- 2) Урок можна використати як додатковий урок для захисту проєктів, якщо ви не використовували контрольну роботу як засіб перевірки знань учнів/учениць.
- 3) Для захисту проєктів забезпечте учнів/учениць технічними та навчальними засобами (ноутбуками, проекторами тощо).
- 4) Якщо ви проводите захист учнівських проєктів, то мотивуйте учнів/учениць до активного обговорення запропонованих проєктів.
- 5) За результатами захисту проєктів виставте учням/ученицям підсумкові (тематичні) оцінки.
- 6) До кожного завдання контрольної роботи наведено детальні розв'язки.

7) Після кожного завдання представлені вправи для корегування, які можна призначити індивідуально учням, у яких було виявлено прогалини в знаннях тих тем, які перевірялися відповідними завданнями.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Захист індивідуальних (групових) проєктів.

III. Аналіз контрольної роботи. Корегування знань учнів (40 хв)

Завдання 1

Варіант 1. Укажіть рівняння дотичної до графіка функції $y = -x^2 - 4x + 2$ у точці з абсцисою $x = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$y = 6x - 3$	$y = -6x + 3$	$y = -6x - 3$	$y = -2x + 3$	$y = -2x - 3$

Розв'язання. $y' = -2x - 4$, $y'(1) = -2 \cdot 1 - 4 = -6$, $y(1) = -1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = -3$.

Шукане рівняння дотичної має вигляд $y = -6(x - 1) - 3 = -6x + 3$.

Відповідь. Б.

Варіант 2. Укажіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - 6x - 8$ у точці з абсцисою $x = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -4x - 7$	$y = -4x - 1$	$y = -8x + 9$	$y = -8x - 9$	$y = -8x - 1$

Розв'язання. $y' = 2x - 6$, $y'(-1) = 2 \cdot (-1) - 6 = -8$, $y(-1) = (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 8 = -1$.

Шукане рівняння дотичної має вигляд $y = -8(x + 1) - 1 = -8x - 9$.

Відповідь. Г.

Вправи для корегування

1. Запишіть рівняння дотичної, яка проходить через точку з абсцисою x_0 :

1) $f(x) = x^4$, $x_0 = 0,5$;

2) $f(x) = 2x^{-2}$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = 2x^3 - 3x - 2$, $x_0 = 2$;

4) $f(x) = 0,5x^4 + 2$, $x_0 = -2$.

Завдання 2

Варіант 1. Укажіть проміжок зростання функції $y = -x^3 + 6x^2 - 9x - 11$.

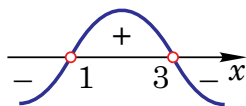
А	Б	В	Г	Д
$[0; 4]$	$[-3; 1]$	$[-1; 3]$	$[-3; -1]$	$[1; 3]$

Розв'язання. Знайдемо похідну заданої функції: $y' = -3x^2 + 12x - 9$.

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до нуля:

$$-3x^2 + 12x - 9 = 0, \quad x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Використаємо метод інтервалів для знаходження проміжків де $y' > 0$.



Врахувавши неперервність функції $y = -x^3 + 6x^2 - 9x - 11$ в точках $x_1 = 1$ та $x_2 = 3$, отримаємо, що вона зростає на проміжку $[1; 3]$.

Відповідь. Д.

Варіант 2. Укажіть проміжок зростання функції $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 7$.

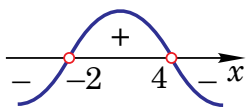
А	Б	В	Г	Д
$[2; 4]$	$[-4; 2]$	$[-2; 4]$	$[-4; -2]$	$[-1; 3]$

Розв'язання. Знайдемо похідну заданої функції: $y' = -3x^2 + 18x - 24$.

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до нуля:

$$-3x^2 + 18x - 24 = 0, \quad x^2 - 6x + 8 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$$

Використаємо метод інтервалів для знаходження проміжків де $y' > 0$.



Врахувавши неперервність функції $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 7$ в точках $x_1 = 2$ та $x_2 = 4$, отримаємо, що вона зростає на проміжку $[2; 4]$.

Відповідь. А.

Вправи для корегування

2. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;

3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;

4) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.

Завдання 3

Варіант 1. Тіло рухається за законом $s(t) = t^3 + 3t^2$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть швидкість тіла (у м/с) через дві секунди після початку руху.

А	Б	В	Г	Д
24	12	9	48	8

Розв'язання. $v(t) = S'(t) = 3t^2 + 6t$. $v(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 12 + 12 = 24$ (м/с).

Відповідь. А.

Варіант 2. Тіло рухається за законом $s(t) = t^3 + 4t^2$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть швидкість тіла (у м/с) через дві секунди після початку руху.

А	Б	В	Г	Д
56	12	14	26	28

Розв'язання. $v(t) = S'(t) = 3t^2 + 8t$. $v(2) = 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 = 12 + 16 = 28$ (м/с).

Відповідь. Д.

Вправи для корегування

3. За означенням, знайдіть миттєву швидкість точки, яка рухається прямолінійно за законом $s(t)$, у момент t_0 :

1) $s(t) = -t^2 + 8t, t_0 = 6$;

2) $s(t) = 3t^3 + 2, t_0 = 2$;

3) $s(t) = \frac{t^2}{4}, t_0 = 4$;

4) $s(t) = 5t - 3, t_0 = 10$.

Завдання 4

- Варіант 1. Знайдіть критичні точки функції $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

А	Б	В	Г	Д
-2; 2	0; 4	3	-4; 4	критичних точок немає

Розв'язання. $y' = 3x^2 - 12x$, $3x^2 - 12x = 0$, $3x(x - 4) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Відповідь. Б.

- Варіант 2. Знайдіть критичні точки функції $y = x^4 - 8x^2 + 16$.

А	Б	В	Г	Д
-2; 2	-2; 0; 2	0; 4	-4; 4	критичних точок немає

Розв'язання. $y' = 4x^3 - 16x$, $4x^3 - 16x = 0$, $4x(x^2 - 4) = 0$, $4x(x - 2)(x + 2) = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Відповідь. Б.

Вправи для корегування

4. Знайдіть критичні точки функції:

1) $y = x^2 - 2x$;

2) $y = x^3 + 3x^2$;

3) $y = 4x - x^2$;

4) $y = 6x^2 + x^3$.

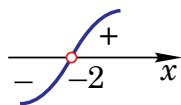
Завдання 5

- Варіант 1. Укажіть найменше значення функції $y = \frac{4}{x^2} - x$ на проміжку $(-\infty; 0)$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	-2	-3

Розв'язання. $y' = -\frac{8}{x^3} - 1 = -\frac{x^3 + 8}{x^3}$.

$x = -2$ — єдина критична точка функції $y = \frac{4}{x^2} - x$ на проміжку $(-\infty; 0)$.



$x = -2$ — єдина точка мінімуму функції $y = \frac{4}{x^2} - x$ на проміжку $(-\infty; 0)$, тому найменшим значенням функції $y = \frac{4}{x^2} - x$ на проміжку $(-\infty; 0)$ є значення функції у точці $x = -2$.

$$y(-2) = \frac{4}{(-2)^2} - (-2) = 1 + 2 = 3.$$

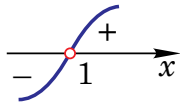
Відповідь. В.

Варіант 2. Укажіть найменше значення функції $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	-2	-3

Розв'язання. $y' = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}$.

$x = 1$ — єдина критична точка функції $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$.



$x = 1$ — єдина точка мінімуму функції $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$, тому найменшим значенням функції $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$ є значення функції у точці $x = 1$.

$$y(1) = 2 \cdot 1 + \frac{1}{1^2} = 2 + 1 = 3.$$

Відповідь. В.

Вправи для корегування

- Укажіть найменше значення функції $y = 2x - \frac{1}{x^2}$ на проміжку $(-\infty; 0)$.
- Укажіть найменше значення функції $y = \frac{4}{x^2} + x$ на проміжку $(0; +\infty)$.

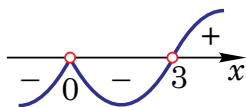
Завдання 6

Варіант 1. Укажіть точки екстремуму функції $y = 0,5x^4 - 2x^3$.

А	Б	В	Г	Д
$x_{\min} = 3$	$x_{\max} = 3$	$x_{\max} = 0, x_{\min} = 3$	$x_{\max} = 3, x_{\min} = 0$	точок екстремуму немає

Розв'язання. Знайдемо критичні точки: $y' = 2x^3 - 6x^2$, $2x^3 - 6x^2 = 0$, $2x^2(x - 3) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Знайдемо проміжки зростання і спадання, використовуючи метод інтервалів:



Таким чином, $x_{\min} = 3$.

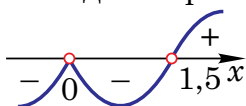
Відповідь. А.

Варіант 2. Укажіть точки екстремуму функції $y = 1,5x^4 - 3x^3$.

А	Б	В	Г	Д
$x_{\max} = 1,5,$ $x_{\min} = 0$	$x_{\max} = 1,5$	$x_{\max} = 0,$ $x_{\min} = 1,5$	$x_{\min} = 1,5$	точок екстремуму немає

Розв'язання. Знайдемо критичні точки: $y' = 6x^3 - 9x^2$, $6x^3 - 9x^2 = 0$, $3x^2(2x - 3) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1,5$.

Знайдемо проміжки зростання і спадання, використовуючи метод інтервалів:



Таким чином, $x_{\min} = 1,5$.

Відповідь. Г.

Вправи для корегування

7. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 12x - x^3$;

2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$;

3) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$;

4) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$.

Завдання 7

Варіант 1. В якій точці функція $f(x) = \sin^4 x + 8\cos^6 x$ досягає свого найменшого значення на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

А	Б	В	Г	Д
$y \frac{\pi}{2}$	$y \frac{\pi}{3}$	$y \frac{\pi}{4}$	$y \frac{\pi}{6}$	$y \frac{\pi}{12}$

Розв'язання. $f'(x) = 4\sin^3 x \cos x - 48\cos^5 x \sin x = 4\sin x \cos x (\sin^2 x - 12\cos^4 x)$.

Знайдемо критичні точки функції $f(x)$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x > 0$ і $\cos x > 0$ тому достатньо розв'язати рівняння $\sin^2 x - 12\cos^4 x = 0$, $1 - \cos^2 x - 12\cos^4 x = 0$, $12\cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$,

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{4}, \\ \cos^2 x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Оскільки $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$.

$$f(0) = 8, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{16} + 8 \cdot \frac{1}{64} = \frac{9}{16} + \frac{2}{16} = \frac{11}{16}.$$

Отже, найменше значення функції досягається в точці $x = \frac{\pi}{3}$.

Відповідь. Б.

Варіант 2. В якій точці функція $f(x) = 27 \sin^4 x + 8 \cos^6 x$ досягає свого найменшого значення на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

А	Б	В	Г	Д
$y \frac{\pi}{2}$	$y \frac{\pi}{3}$	$y \frac{\pi}{4}$	$y \frac{\pi}{6}$	$y \frac{\pi}{12}$

Відповідь. Г.

Вправи для корегування

8. Знайдіть найбільше й найменше значення функцій $f(x)$ на заданому відрізку:

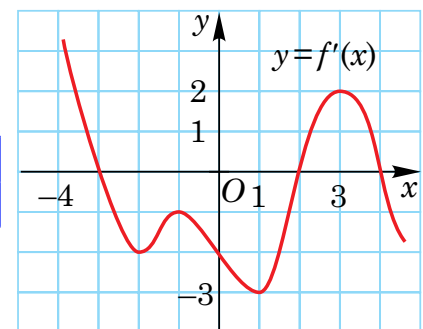
1) $f(x) = 2 \cos x - \sin 2x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$ 2) $f(x) = 2\sqrt{3} \cos x + 2 \sin x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

Завдання 8

Варіант 1. На рисунку зображено графік похідної функції $y = f'(x)$. Користуючись зображенням, укажіть усі точки максимуму функції $y = f(x)$.

А	Б	В	Г	Д
3; -1	-2; 1	3	-3; 4	-3

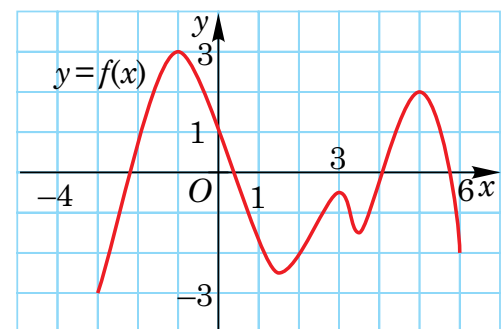
Відповідь. Г.



Варіант 2. На рисунку зображено графік похідної функції $y = f'(x)$. Користуючись зображенням, укажіть усі точки мінімуму функції $y = f(x)$.

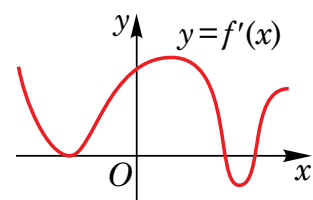
А	Б	В	Г	Д
-3	-5; 3	2	-1; 2	-1

Відповідь. Б.



Вправи для корегування

9. На рисунку побудовано графік функції $f'(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Скільки точок екстремуму має функція $f(x)$?



Завдання 9

Варіант 1. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{1}{4}t^4 + t^3 + 3t$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Визначте прискорення її руху (у м/с) у момент часу $t = 3$ с.

А	Б	В	Г	Д
39	12	45	48	36

Розв'язання. $v(t) = S'(t) = t^3 + 3t^2 + 3$,

$a(t) = v'(t) = S''(t) = 3t^2 + 6t$, $a(3) = 3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = 27 + 18 = 45$ (м/с²).

Відповідь. В.

Варіант 2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 8t$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Визначте прискорення її руху (у м/с²) в момент часу $t = 6$.

А	Б	В	Г	Д
18	17	5	6	80

Розв'язання. $v(t) = S'(t) = t^2 + 6t + 8$,

$a(t) = v'(t) = S''(t) = 2t + 6$, $a(6) = 2 \cdot 6 + 6 = 12 + 6 = 18$ (м/с²).

Відповідь. А.

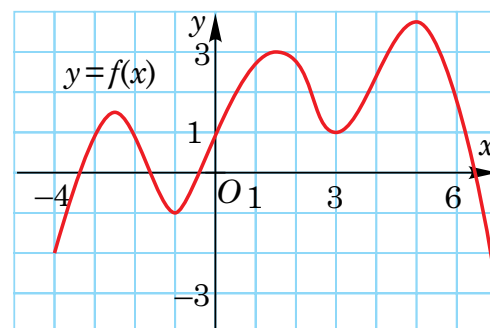
Вправи для корегування

10. Одне тіло рухається по координатній прямій за законом $s_1(t) = t^3 - t^2 + 3t - 2$, а друге — за законом $s_2(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 5t - 8$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть прискорення кожного тіла в момент часу, коли їхні швидкості рівні.

Завдання 10

Варіант 1. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $(-4; 7)$. У кожній точці цього проміжку існує похідна $y = f'(x)$. Скільки всього коренів має рівняння $f'(x) = 0$ на проміжку $(-4; 7)$?

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	чотири	п'ять

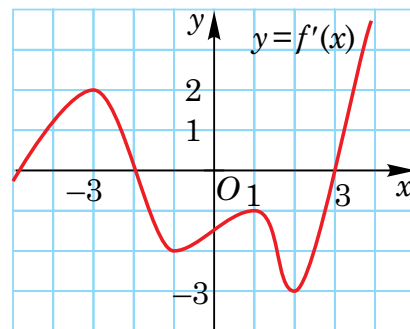


Розв'язання. Похідна дорівнюватиме нулю тоді коли дотична, проведена до графіка функції буде паралельною осі абсцис. За даним графіком бачимо, що це можливо у п'яти точках.

Відповідь. Д.

Варіант 2. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $(-3; 6)$. У кожній точці цього проміжку існує похідна $y = f'(x)$. Скільки всього коренів має рівняння $f'(x) = 0$ на проміжку $(-4; 7)$?

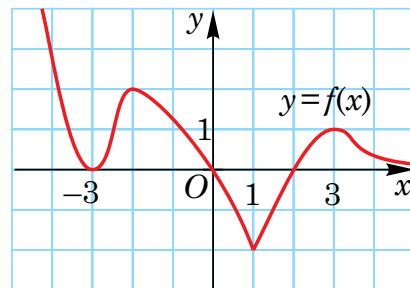
А	Б	В	Г	Д
один	два	три	чотири	п'ять



Відповідь. Д.

Вправи для корегування

11. Укажіть кількість точок екстремуму функції, графік якої зображено на рисунку.



Завдання 11

Варіант 1. Відомо, що S — площа трикутника, який обмежений віссю абсцис, віссю ординат та дотичною до параболи $y = x^2$, яка проходить через точку з абсцисою $x = 2$. Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$0 < S \leq 1,5$	$1,5 < S \leq 2$	$2 < S \leq 2,5$	$2,5 < S \leq 3$	$S > 3$

Розв'язання. Знайдемо рівняння дотичної:

$$y' = 2x, \quad y'(2) = 2 \cdot 2 = 4, \quad y(2) = 2^2 = 4, \quad y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4.$$

Дотична перетинає осі координат у точках $(0; -4)$ та $(1; 0)$.

Отже, потрібно знайти площу прямокутного трикутника з катетами 4 та 1. Площа такого трикутника дорівнює 2 (кв. од.).

Відповідь. Б.

Варіант 2. Відомо, що S — площа трикутника, який обмежений віссю абсцис, віссю ординат та дотичною до параболи $y = \frac{x^2}{2}$, що проходить через точку з абсцисою $x = 4$. Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$0 < S \leq 5$	$5 < S \leq 7$	$7 < S \leq 9$	$9 < S \leq 12$	$S > 12$

Розв'язання. Знайдемо рівняння дотичної:

$$y' = x, \quad y'(4) = 4, \quad y(4) = \frac{4^2}{2} = 8, \quad y = 4(x - 4) + 8 = 4x - 8.$$

Дотична перетинає осі координат у точках $(0; -8)$ та $(2; 0)$.

Отже, потрібно знайти площу прямокутного трикутника з катетами 8 та 2. Площа такого трикутника дорівнює 8 (кв. од.).

Відповідь. В.

Вправи для корегування

- 12.** Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Завдання 12

- Варіант 1.** Число 24 подали у вигляді суми двох додатних доданків таким чином, що добуток їхніх квадратів набуває найбільшого можливого значення. Укажіть не менший із цих двох доданків.

А	Б	В	Г	Д
15	16	12	20	23

Розв'язання. Нехай одне із чисел дорівнює x , $x \in [0; 24]$, тоді інше число дорівнює $(24 - x)$. Потрібно знайти значення x у якому функція $f(x) = x^2(24 - x)^2$ набуває свого найбільшого значення.

$$f'(x) = 2x(24 - x)^2 - 2x^2(24 - x) = 2x(24 - x)(24 - 2x).$$

На проміжку $(0; 24)$ функція $f(x)$ має одну критичну точку $x = 12$.

$$f(0) = f(24) = 0, f(12) = 12^2 \cdot 12^2 > 0.$$

Отже, при $x = 12$ функція $f(x)$ набуває свого найбільшого значення.

Відповідь. В.

- Варіант 2.** Число 18 подали у вигляді суми двох додатних доданків таким чином, що сума їхніх квадратів набуває найменшого можливого значення. Укажіть не більший із цих двох доданків.

А	Б	В	Г	Д
4	9	1	8	6

Розв'язання. Нехай одне із чисел дорівнює x , $x \in [0; 18]$, тоді інше число дорівнює $(18 - x)$. Потрібно знайти значення x у якому функція $f(x) = x^2 + (18 - x)^2$ набуває свого найменшого значення.

$$f'(x) = 2x - 2(18 - x) = 4x - 36.$$

На проміжку $(0; 18)$ функція $f(x)$ має одну критичну точку $x = 9$.

$$f(0) = f(18) = 324, f(9) = 9^2 + 9^2 = 162.$$

Отже, при $x = 9$ функція $f(x)$ набуває свого найменшого значення.

Відповідь. Б.

Вправи для корегування

- 13.** Подайте число 12 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб добуток квадрата одного з цих чисел на подвоєне друге число був найбільшим.

Завдання 13

Варіант 1. Знайдіть добуток найбільшого та найменшого значень функції

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 6 \text{ на відрізку } [1; 3].$$

А	Б	В	Г	Д
-11	-10	-3	$\frac{11}{3}$	11

Розв'язання. $f'(x) = x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 4x + 4 = 0$,

$x = 2$ — критична точка функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 6$.

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 8 - 8 + 8 - 6 = \frac{8}{3} - 6 = -\frac{10}{3},$$

$$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 4 - 6 = \frac{1}{3} - 4 = -\frac{11}{3},$$

$$f(3) = 9 - 18 + 12 - 6 = -3.$$

$$\min_{[1;3]} f(x) = -\frac{11}{3}, \max_{[1;3]} f(x) = -3, -\frac{11}{3} \cdot (-3) = 11.$$

Відповідь. Д.

Варіант 2. Знайдіть добуток найбільшого та найменшого значень функції $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ на відрізку $[0; 3]$.

А	Б	В	Г	Д
-14	-18	-36	36	126

Відповідь. В.

Вправи для корегування

14. Знайдіть найбільше й найменше значення функцій $f(x)$ на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0; 3]$;

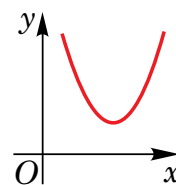
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2; 0]$;

3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2; 1]$;

4) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2$, $[-1; 2]$.

Завдання 14

Варіант 1. На рисунку зображено графік квадратичної функції $y = f(x)$. Серед наведених графіків укажіть графік функції $y = f'(x)$.



А	Б	В	Г	Д

Розв'язання. Нехай $f(x) = ax^2 + bx + c$.

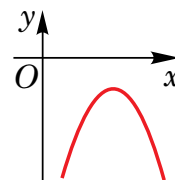
Оскільки вітки параболи направлені вгору, то $a > 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$, $-b > 0$, $b < 0$.

$f'(x) = 2ax + b$ — лінійна функція з додатним кутовим коефіцієнтом.

Відповідь. А.

Варіант 2. На рисунку зображено графік квадратичної функції $y = f(x)$.

Серед наведених графіків укажіть графік функції $y = f'(x)$.



А	Б	В	Г	Д

Розв'язання. Нехай $f(x) = ax^2 + bx + c$.

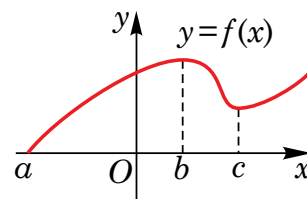
Оскільки вітки параболи направлені донизу, то $a < 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$, $-b < 0$, $b > 0$.

$f'(x) = 2ax + b$ — лінійна функція з від'ємним кутовим коефіцієнтом.

Відповідь. Б.

Вправи для корегування

- 15.** За графіком функції, зображеним на рисунку, побудуйте ескіз графіка її похідної.

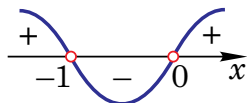


Завдання 15

Варіант 1. Знайдіть проміжки зростання функції $y = 4x^3 + 6x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 0]$	$(-\infty; -1]$ і $[0; +\infty)$	$(-\infty; -1]$	$[-1; 1]$	$[-3; 0]$

Розв'язання. $y' = 12x^2 + 12x$, $12x^2 + 12x > 0$, $12x(x + 1) > 0$.



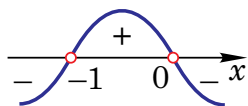
Враховуючи те, що функція $y = 4x^3 + 6x^2$ неперервна в точках $x = -1$ та $x = 0$ отримуюмо, що проміжки $(-\infty; -1]$ і $[0; +\infty)$ є проміжками зростання.

Відповідь. Б.

Варіант 2. Знайдіть проміжки зростання функції $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 0]$	$(-\infty; -1]$ і $[0; +\infty)$	$[-1; +\infty)$	$[0; 1]$	$(-\infty; 0]$ і $[1; +\infty)$

Розв'язання. $y' = -x^2 - x$, $-x^2 - x > 0$, $-x(x + 1) > 0$.



Враховуючи те, що функція $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ неперервна в точках $x = -1$ та $x = 0$ отримуюмо, що проміжок $[-1; 0]$ є проміжком зростання.
Відповідь. А.

Вправи для корегування

16. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $y = x^3 + 2x$;

2) $y = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$;

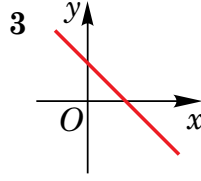
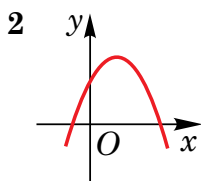
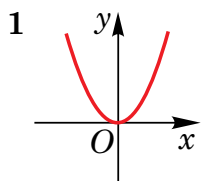
3) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;

4) $y = -x^5 + 5x$.

Завдання 16

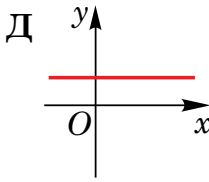
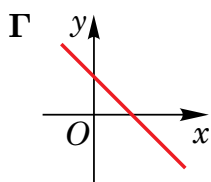
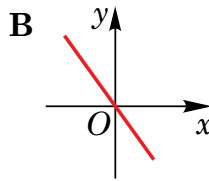
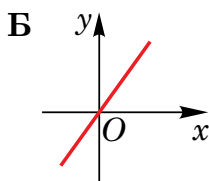
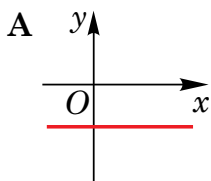
Варіант 1. Установіть відповідність між графіком функцій (1–3) та графіком її похідної (А–Д).

Графіки функції



	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

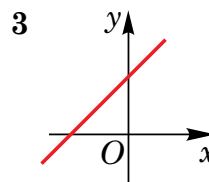
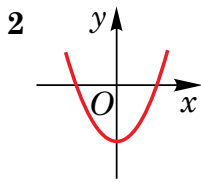
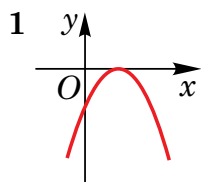
Графіки похідної функції



Відповідь. 1 – Б, 2 – Г, 3 – А.

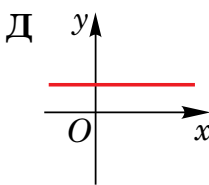
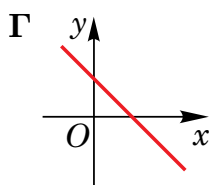
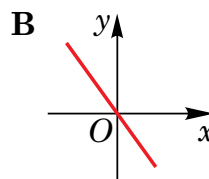
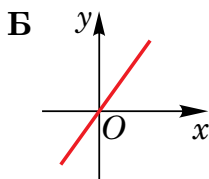
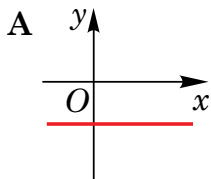
Варіант 2. Установіть відповідність між графіком функції (1–3) та графіком похідної (А–Д) функції.

Графіки функції



	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

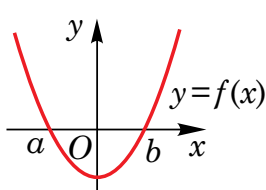
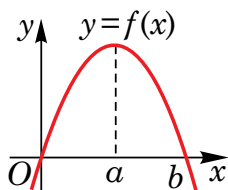
Графіки похідної функції



Відповідь. 1 – Б, 2 – Г, 3 – А.

Вправи для корегування

17. За графіками функцій, зображених на рисунку побудуйте ескіз графіків їхніх похідних.



Завдання 17

Варіант 1. Функції (1–3) поставте у відповідність проміжок (А–Д), на якому функція опукла вгору.

Функція

1 $f(x) = \sqrt{x+1}$

2 $f(x) = -4x^2 - 8$

3 $f(x) = 10x^2 - x^5$

Проміжок опуклості функції

А $(-\infty; +\infty)$

Б $[0; +\infty)$

В $(-\infty; 1]$

Г $[-1; +\infty)$

Д $[1; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Г, 2 – А, 3 – Д.

Варіант 2. Функції (1–3) поставте у відповідність проміжок (А–Д), на якому функція опукла вниз.

Функція

1 $f(x) = x^3 - 3x^2$

2 $f(x) = x^2 - 4x$

3 $f(x) = \frac{2}{x+1} - 1$

Проміжок опуклості функції

А $(-\infty; +\infty)$

Б $(0; +\infty)$

В $(-\infty; 1]$

Г $(-1; +\infty)$

Д $[1; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Д, 2 – А, 3 – Г.

Вправи для корегування

18. Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$;

2) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 4$.

Завдання 18.

Варіант 1. Установіть відповідність між функцією (1–3) та рівняннями усіх асимптот (А – Д) функції.

Функції

1 $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

2 $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

3 $f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x-1}$

Рівняння асимптот

А $x = 1; y = 3x + 5$

Б $x = 1; y = 3x - 5$

В $x = -1; y = 3$

Г $x = -1; x = 1; y = 0$

Д $x = -1; x = 1$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – В, 2 – Г, 3 – А.

Варіант 2. Установіть відповідність між функцією (1–3) та рівняннями усіх асимптот (А–Д) функції.

Функція

1 $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$

2 $f(x) = \frac{3x^2-2x-1}{x-3}$

3 $f(x) = \frac{3x-5}{x+3}$

Рівняння асимптот функції

А $x = 3; y = 3x + 7$

Б $x = 3; y = 3x - 11$

В $x = -3; y = 3$

Г $x = -3; x = 3; y = 0$

Д $x = -3; x = 3$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Г, 2 – А, 3 – В.

Вправи для корегування

19. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$;

2) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$;

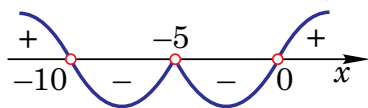
3) $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{x-1}$;

4) $f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{x^2-1}$.

Завдання 19

Варіант 1. Знайдіть максимум функції $y = \frac{x^2}{x+5}$.

Розв'язання. $y' = \frac{2x(x+5) - x^2}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x}{(x+5)^2} = \frac{x(x+10)}{(x+5)^2}$.



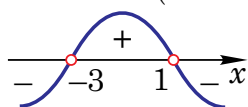
$$x_{\max} = -10, \max y = y(-10) = \frac{(-10)^2}{-10+5} = \frac{100}{-5} = -20.$$

Відповідь. -20 .

Варіант 2. Знайдіть мінімум функції $y = \frac{3(x+1)}{x^2+3}$.

Розв'язання.

$$y' = \frac{3(x^2+3) - 6x(x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 9}{(x^2+3)^2} = \frac{-3(x^2 + 2x - 3)}{(x^2+3)^2} = \frac{-3(x-1)(x+3)}{(x^2+3)^2}.$$



$$x_{\min} = -3, \min y = y(-3) = \frac{3(-3+1)}{(-3)^2+3} = \frac{-6}{12} = -0,5.$$

Відповідь. $-0,5$.

Вправи для корегування

20. Знайдіть екстремуми функції:

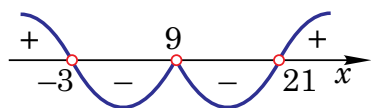
1) $y = \frac{3x-1}{3x+1}$;

2) $y = \frac{1-2x}{3+2x}$.

Завдання 20

Варіант 1. Знайдіть точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2+7x}{x-9}$. У відповідь запишіть їхній добуток.

Розв'язання. $f'(x) = \frac{(2x+7)(x-9) - (x^2+7x)}{(x-9)^2} = \frac{x^2 - 18x - 63}{(x-9)^2} = \frac{(x-21)(x+3)}{(x-9)^2}$.



$$x_{\max} = -3, x_{\min} = 21, -3 \cdot 21 = -63.$$

Відповідь. -63 .

Варіант 2. Знайдіть точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{x - 2}$. У відповідь запишіть їхній добуток.
Відповідь. -12 .

Вправи для корегування

21. Знайдіть точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}.$$

Завдання 21

Варіант 1. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + 9t^2$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). В який момент часу (у секундах) прискорення точки буде дорівнювати 2 м/с^2 ?

Розв'язання. $a(t) = s''(t) = \left(\frac{t^3}{3} - 4t^2 + 18t \right)' = t^2 - 8t + 18, \quad t^2 - 8t + 18 = 2,$

$$t^2 - 8t + 16 = 0, \quad (t - 4)^2 = 0, \quad t = 4.$$

Відповідь. 4.

Варіант 2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{2t^3}{3} + 3t^2$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). В який момент часу (у секундах) прискорення точки буде дорівнювати 2 м/с^2 ?

Розв'язання. $a(t) = s''(t) = \left(\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 6t \right)' = t^2 - 4t + 6,$

$$t^2 - 4t + 6 = 2, \quad t^2 - 4t + 4 = 0, \quad (t - 2)^2 = 0, \quad t = 2.$$

Відповідь. 2.

Вправи для корегування

22. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2t^3 + t^2 - 4$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть момент часу, коли прискорення дорівнює 1 м/с^2 .

Завдання 22

Варіант 1. Знайдіть найменше значення функції $y = 4x^3 - 48x$ на проміжку $[1; 4]$.

Розв'язання. $y' = 12x^2 - 48, \quad 12x^2 - 48 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$

Тобто на проміжку $[1; 4]$ функція $y = 4x^3 - 48x$ має критичну точку $x = 2$.

$$y(1) = 4 - 48 = -44, \quad y(4) = 256 - 192 = 64, \quad y(2) = 32 - 96 = -64. \quad \min_{[1;4]} y = -64.$$

Відповідь. -64 .

Варіант 2. Обчисліть найбільше значення функції $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$ на проміжку $[-3; 1]$.

Розв'язання. $y' = 6x^2 - 18x - 24, \quad 6x^2 - 18x - 24 = 0, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$

На проміжку $[-3; 1]$ функція $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$ має одну критичну точку $x = -1$.
 $y(-3) = -27 - 81 + 72 + 7 = -29$, $y(1) = 2 - 9 - 24 + 7 = -24$,
 $y(-1) = -2 - 9 + 24 + 7 = 20$.
 $\max_{[-3;1]} y = 20$.
Відповідь. 20.

Вправи для корегування

- 23.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на відрізку:
- 1) $[0; 2]$; 2) $[3; 6]$; 3) $[-1; 3]$; 4) $[2; 7]$.

IV. Рефлексія (1 хв)

Зобразіть сходи успіху і позначте свій рівень розуміння теми уроку.

1 сходинка — «Мені важко, потрібно ще попрацювати».

2 сходинка — «Я щось зрозумів/зрозуміла, але ще маю запитання».

3 сходинка — «Можу розв'язувати завдання самостійно».

4 сходинка — «Можу пояснити завдання іншим».

