

Урок 28. Підсумкове заняття з теми «Застосування похідної»

РОБОЧИЙ АРКУШ

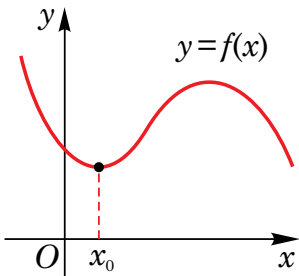
(моє ім'я)

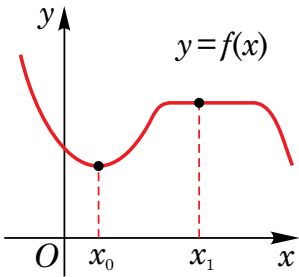
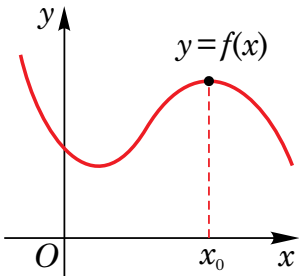
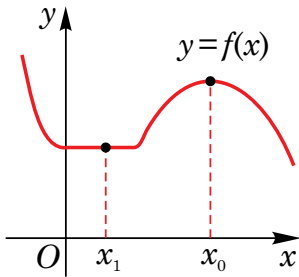
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите основні принципи застосування похідної;
- 2) повторите основні принципи застосування другої похідної;
- 3) удосконалисте вміння та навички щодо дослідження функції;
- 4) за допомогою проєктів підведете підсумки вивченої змістової теми.

II. Фронтальне повторення та узагальнення

Вид точки локального екстремуму	Означення та графічна ілюстрація	Примітка
Точка локального мінімуму	 x_0 — точка мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.	Точка мінімуму: $x_{\min} = x_0$. Мінімум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\min} = f(x_0)$.

Вид точки локального екстремуму	Означення та графічна ілюстрація	Примітка
Точка строгого локального мінімуму	 x_0 — точка строгого мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого проколотого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) > f(x_0)$.	На рисунку x_0 є точкою строгого мінімуму, а x_1 є однією з точок максимуму, але не строгого.
Точка локального максимуму	 x_0 — точка максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.	Точка максимуму: $x_{\max} = x_0$. Максимум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\max} = f(x_0)$.
Точка строгого локального максимуму	 x_0 — точка строгого максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого проколотого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) < f(x_0)$.	На рисунку x_0 є точкою строгого максимуму, а x_1 є однією з точок мінімуму, але не строгого.

Теорема Ферма. Необхідна умова існування екстремуму

Якщо x_0 — точка екстремуму функції, та існує $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

За теоремою, в точці екстремуму диференційовної функції дотична до графіка є паралельною осі абсцис або збігається з нею.

Означення. Внутрішня точка x_0 з області визначення функції $y = f(x)$ є критичною, якщо або $f'(x_0) = 0$, або не існує $f'(x_0)$.

Теорема. Необхідна умова існування екстремуму в точці. Якщо x_0 — точка екстремуму функції, то вона є критичною, тобто або $f'(x_0) = 0$, або не існує $f'(x_0)$.

Теорема. Ознаки точок максимуму та мінімуму функції.

1) Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 і при цьому $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; x_0)$, а також $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0; b)$. Тоді x_0 є точкою локального максимуму даної функції.

2) Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 і при цьому $f'(x) < 0$ на інтервалі $(a; x_0)$, а також $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0; b)$. Тоді x_0 є точкою локального мінімуму даної функції.

Теорема Ролля. Достатня умова наявності нулів похідної на проміжку.

Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$ і диференційовною у будь-якій точці інтервалу $(a; b)$ і при цьому $f(a) = f(b)$. Тоді на інтервалі $(a; b)$ існує точка x_0 , для якої $f'(x_0) = 0$.

За теоремою, для «гладкої» функції між двома аргументами з однаковим значенням функції існує точка, в якій дотична до графіка є паралельною до осі абсцис або збігається з нею.

Теорема Лагранжа. Формула скінченних приростів. Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$ і диференційовна у будь-якій точці проміжку $(a; b)$. Тоді на проміжку $(a; b)$ існує точка x_0 , для якої

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Дана теорема означає, що для «гладкої» функції, заданої на відрізку існує точка, в якій дотична до графіка є паралельною до відрізка, що з'єднує «кінцеві точки» графіка, або містить цей відрізок.

Теорема. Про наявність нулів похідної. Між двома нулями диференційовної функції лежить принаймні один нуль її похідної. Зокрема, якщо диференційована функція має n нулів, то її похідна має не менш як $n - 1$ нулів.

Теорема. Ознака сталості функції. Нехай на даному проміжку функція диференційовна та $f'(x) = 0$ для будь-якої точки проміжку. Тоді функція на цьому проміжку є сталою.

Теорема. Ознака монотонності функції на інтервалі.

1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) > 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є зростаючою.

2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) < 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є спадною.

Проміжки монотонності

Якщо функція є монотонною на інтервалі, а в одному чи обох кінцях інтервалу є неперервною, то такий кінець (кінці) можна приєднати до проміжку монотонності.

Зокрема:

1) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; b)$ і неперервною в точках a та b , то вона є монотонною на відрізку $[a; b]$;

2) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; +\infty)$ або на інтервалі $(-\infty; b)$ і при цьому є неперервною в точці a або b , то вона є монотонною на інтервалі $[a; +\infty)$ або $(-\infty; b]$ відповідно.

Теорема. Властивість монотонної функції.

1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та зростає, тоді $f'(x) \geq 0$ для будь-якої точки цього інтервалу.

2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та спадає, тоді $f'(x) \leq 0$ для будь-якої точки цього інтервалу.

Заповніть порожні клітинки таблиці для заданої функції.

Схема дослідження функції на монотонність та екстремуми	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = x^3 - 3x^2$.
1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.	
2. Знайдіть похідну даної функції.	
3. Знайдіть критичні точки даної функції, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ або точки, в яких похідна не існує.	
4. Нанесіть критичні точки на $D(f)$ і визначте знаки похідної на кожному з утворених інтервалів.	
5. Визначте проміжки монотонності даної функції (якщо похідна додатна, то функція зростає, якщо похідна від'ємна, то функція спадає). Запишіть проміжки зростання, розділяючи їх крапкою з комою. Аналогічно зробіть для проміжків спадання.	
6. Користуючись ознаками точок максимуму та мінімуму функції, визначте точки локального екстремуму. За необхідності, знайдіть значення функції у цих точках (локальні екстремуми).	

Заповніть порожні клітинки таблиці для заданої функції.

Схема знаходження найбільшого або найменшого значень неперервної функції на відрізку	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = x^3 - 3x^2, [1; 3]$.
1. Знайдіть критичні точки даної функції, які належать даному відрізку.	
2. Знайдіть значення функції у всіх знайдених критичних точках та окремо на кінцях відрізка.	
3. Порівняйте знайдені значення функції та оберіть з них найбільше (найменше). Ці значення й будуть найбільшим (найменшим) значенням даної функції на відрізку.	

Означення. Другою похідною (похідною другого порядку) функції $y = f(x)$, у точці x_0 називають похідну від функції $f'(x)$ у точці x_0 : $f''(x_0) = (f'(x))'(x_0)$.

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має другу похідну у деякій точці (на деякій множині), то її називають **двічі диференційовною в цій точці (на цій множині)**. На множині, де дана функція двічі диференційовна, розглядають нову функцію $y = f''(x)$, яка ставить кожному аргументу x_0 з даної множини у відповідність значення функції, що дорівнює $f''(x_0)$.

Механічний зміст похідної функції

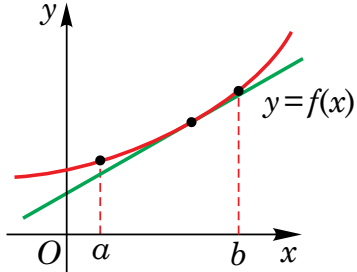
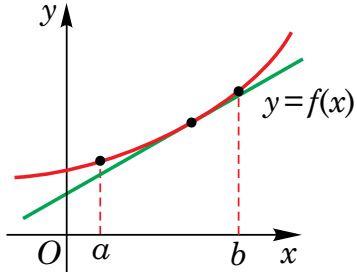
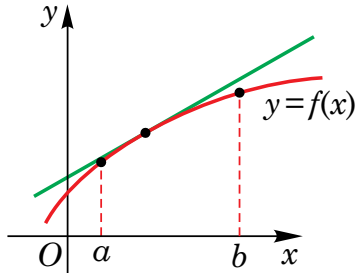
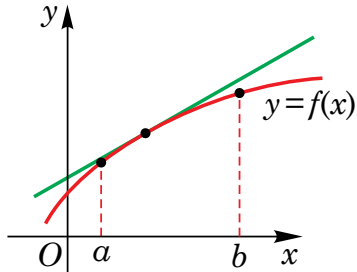
Якщо тіло рухається уздовж координатної прямої, і його положення визначається функцією $s(t)$, то його миттєва швидкість (з урахуванням напрямку) в момент часу t_0 визначається за формулою $v(t_0) = s'(t_0)$. Таким чином, $s'(t) = v(t)$.

Механічний зміст другої похідної

Якщо тіло рухається уздовж координатної прямої, і його положення визначається функцією $s(t)$, то його миттєве прискорення (з урахуванням напрямку) в момент часу t_0 визначається за формулою $a(t_0) = s''(t_0)$. Таким чином, $s''(t) = a(t)$.

Приклад 1. Тіло рухається уздовж координатної прямої, і його положення визначається функцією $s(t) = t^3 + 3t$, де s — переміщення (у метрах), t — час (в секундах). Знайдіть миттєву швидкість тіла та його миттєве прискорення в момент часу $t_0 = 2$ с.

[illegible]

Вид опуклості функції, диференційованої на проміжку I	Означення	Графічна ілюстрація
Опукла вниз	Графік функції на проміжку I розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.	
Строго опукла вниз	Графік функції на проміжку I розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку – точку дотику.	
Опукла вгору	Графік функції на проміжку I розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.	
Строго опукла вгору	Графік функції на проміжку I розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку – точку дотику.	

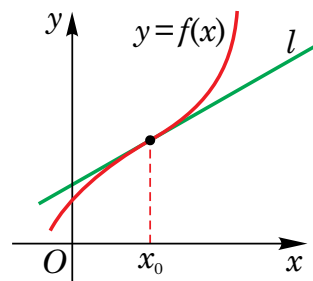
Геометричний зміст похідної функції

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною в точці x_0 . Тоді $f'(x)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка $f(x)$ в цій точці до додатного напрямку осі абсцис.

Геометричний зміст другої похідної

1. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I , причому $f''(x) \geq 0$ для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на проміжку I .
2. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I , причому $f''(x) \leq 0$ для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на проміжку I .

Означення. Точка x_0 називається **точкою перегину** функції $y = f(x)$, якщо дотична до графіка у точці $(x_0; f(x_0))$ переходить з одного боку дотичної на інший.



Це означає, що у точці перегину напрямок опуклості функції змінюється. Так, на рисунку при $x \leq x_0$ функція опукла вгору, а при $x \geq x_0$ функція опукла вниз.

Теорема. Необхідна умова для точки перегину. Якщо функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною в точці перегину x_0 і при цьому $f''(x)$ є неперервною в точці x_0 , то $f''(x_0) = 0$.

Теорема. Достатня умова для точки перегину. Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x_0 і має другу похідну у проколотому околі цієї точки. Якщо при переході через x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак на протилежний, то x_0 — точка перегину функції $y = f(x)$.

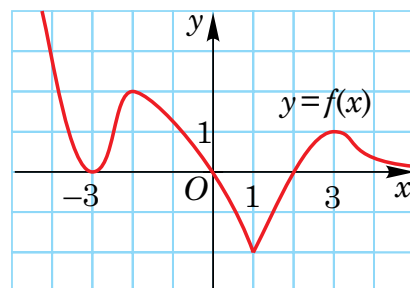
Заповніть порожні клітинки таблиці для заданої функції.

Схема дослідження функції на опуклість та точки перегину	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = x^3 - 3x^2$
1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.	
2. Знайдіть другу похідну даної функції та формальну область її визначення $D(f'')$.	
3. Знайдіть корені рівняння $f''(x) = 0$.	
4. Нанесіть знайдені корені на спільну частину $D(f)$ та $D(f'')$ і визначте знаки другої похідної на кожному з утворених інтервалів.	
5. Користуючись ознаками опуклості функції вниз ($f''(x) \geq 0$) і вгору ($f''(x) \leq 0$), визначте проміжки опуклості даної функції. За достатньою умовою, визначте точки перегину.	
6. Запишіть у відповідь: • проміжки опуклості вниз даної функції, розділяючи їх крапкою з комою; • проміжки опуклості вгору даної функції, розділяючи їх крапкою з комою; • точки перегину.	

III. Перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$.
2. Знайдіть критичні точки функції $y = 6x^2 + x^3$.
3. Визначте найменше значення функції $y = 2x - \frac{1}{x^2}$ на проміжку $(-\infty; 0)$.
4. Укажіть кількість точок екстремуму функції, графік якої зображено на рисунку.

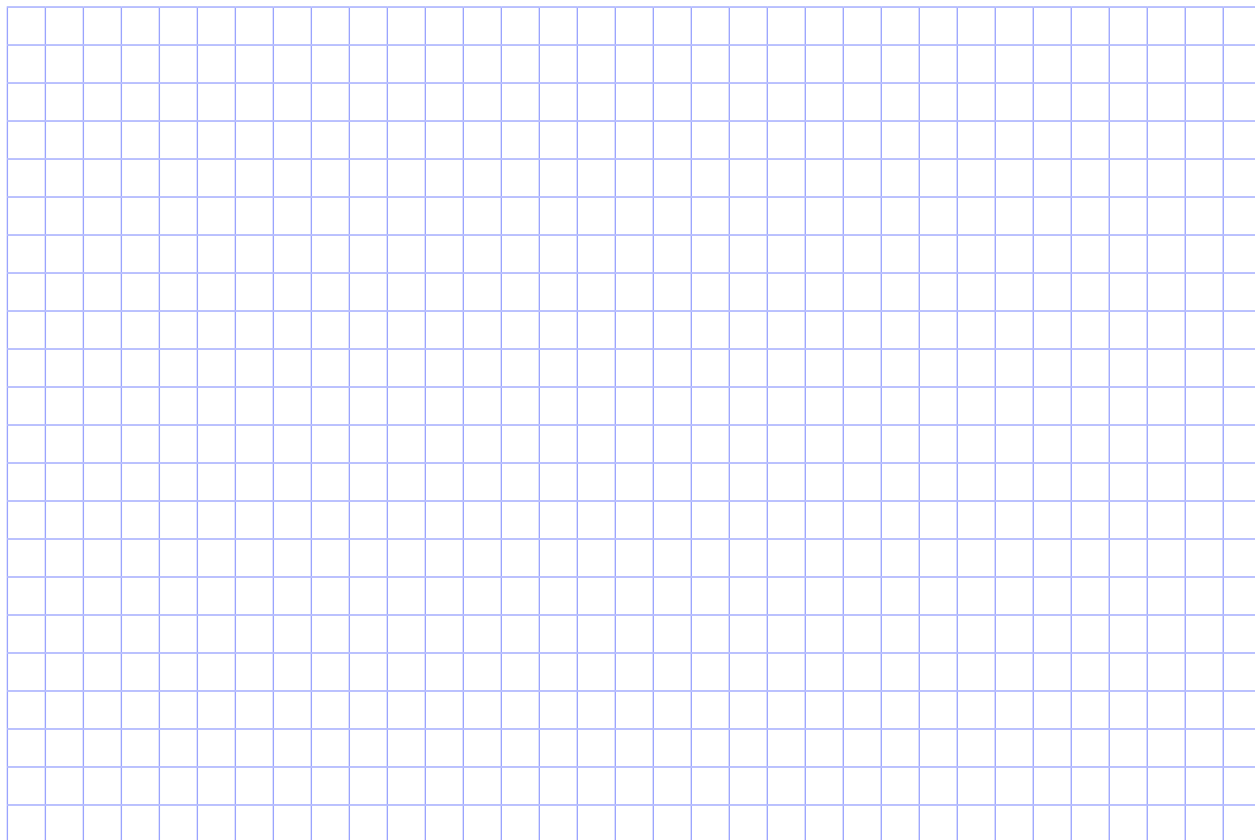


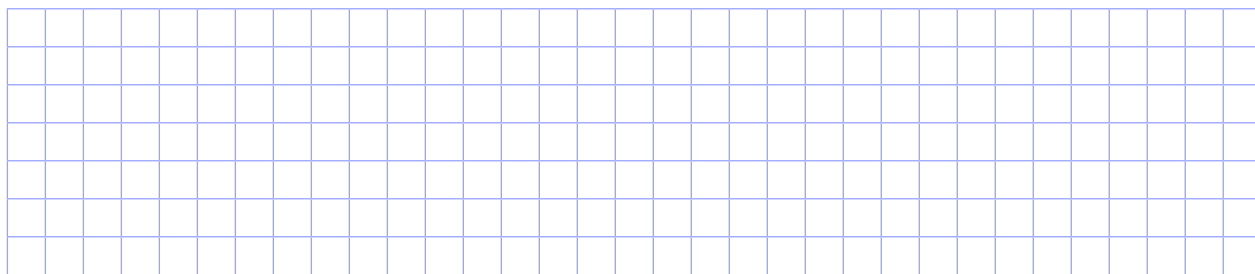
5. Подайте число 12 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб добуток квадрата одного з цих чисел на подвоєне друге число був найбільшим.

IV. Захист проєктів

Приклад 2. Нехай додатні числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ є довжинами сторін деякого опуклого многокутника. Доведіть, що виконується нерівність:

$$\frac{a_1}{-a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 - a_2 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots - a_n} \geq \frac{n}{n-2}.$$





Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

