

Урок 28. Підсумкове заняття з теми «Застосування похідної»

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації.

План уроку

1. Фронтальне повторення та узагальнення.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Захист проєктів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

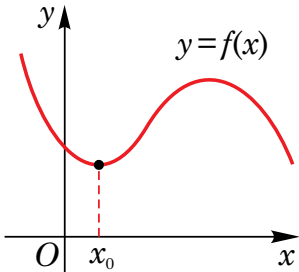
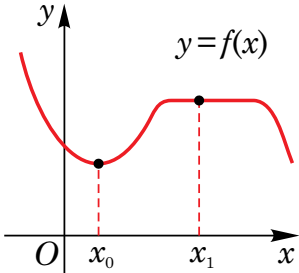
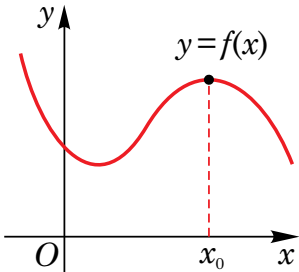
досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П].

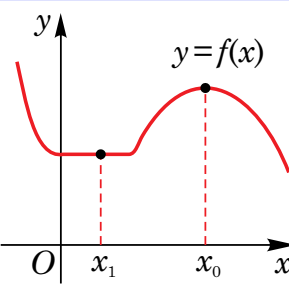
Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Організуйте загальне повторення усіх основних ідей щодо застосування похідної. Учні/учениці робили частково таке узагальнення при підготовці до контрольної роботи. При обговоренні прикладів до різних властивостей першої та другої похідних, доцільніше надати перевагу найпростішим варіантам — це дозволить зекономити час для використання його на інших етапах уроку.
- 2) Основна мета уроку — узагальнення та систематизація знань учнів/учнів щодо застосування похідної.
- 3) Додаткова мета — розвиток soft skills, готовності працювати в команді.
- 4) Організуйте захист індивідуальних або командних проєктів, створених учнями/ученицями впродовж вивчення теми. Захист проєктів може бути врахований при виставленні тематичної оцінки.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Фронтальне повторення та узагальнення

Вид точки локального екстремуму	Означення та графічна ілюстрація	Примітка
Точка локального мінімуму	 x_0 — точка мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.	Точка мінімуму: $x_{\min} = x_0$. Мінімум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\min} = f(x_0)$.
Точка строгого локального мінімуму	 x_0 — точка строгого мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого проколотого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) > f(x_0)$.	На рисунку x_0 є точкою строгого мінімуму, а x_1 є однією з точок максимуму, але не строгого.
Точка локального максимуму	 x_0 — точка максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.	Точка максимуму: $x_{\max} = x_0$. Максимум (частковий випадок локального екстремума): $y_{\max} = f(x_0)$.

Вид точки локального екстремуму	Означення та графічна ілюстрація	Примітка
Точка строгого локального максимуму	 x_0 — точка строгого максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого проколотої δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) < f(x_0)$.	На рисунку x_0 є точкою строгого максимуму, а x_1 є однією з точок мінімуму, але не строгого.

Теорема Ферма. Необхідна умова існування екстремуму

Якщо x_0 — точка екстремуму функції, та існує $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

За теоремою, в точці екстремуму диференційовної функції дотична до графіка є паралельною осі абсцис або збігається з нею.

Означення. Внутрішня точка x_0 з області визначення функції $y = f(x)$ є критичною, якщо або $f'(x_0) = 0$, або не існує $f'(x_0)$.

Теорема. Необхідна умова існування екстремуму в точці. Якщо x_0 — точка екстремуму функції, то вона є критичною, тобто або $f'(x_0) = 0$, або не існує $f'(x_0)$.

Теорема. Ознаки точок максимуму та мінімуму функції.

1) Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 і при цьому $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; x_0)$, а також $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0; b)$. Тоді x_0 є точкою локального максимуму даної функції.

2) Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 і при цьому $f'(x) < 0$ на інтервалі $(a; x_0)$, а також $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0; b)$. Тоді x_0 є точкою локального мінімуму даної функції.

Теорема Ролля. Достатня умова наявності нулів похідної на проміжку.

Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$ і диференційовною у будь-якій точці інтервалу $(a; b)$ і при цьому $f(a) = f(b)$. Тоді на інтервалі $(a; b)$ існує точка x_0 , для якої $f'(x_0) = 0$.

За теоремою, для «гладкої» функції між двома аргументами з однаковим значенням функції існує точка, в якій дотична до графіка є паралельною до осі абсцис або збігається з нею.

Теорема Лагранжа. Формула скінченних приростів. Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$ і диференційовна у будь-якій точці проміжку $(a; b)$. Тоді на проміжку $(a; b)$ існує точка x_0 , для якої

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Дана теорема означає, що для «гладкої» функції, заданої на відрізку існує точка, в якій дотична до графіка є паралельною до відрізка, що з'єднує «кінцеві точки» графіка, або містить цей відрізок.

Теорема. Про наявність нулів похідної. Між двома нулями диференційовної функції лежить принаймні один нуль її похідної. Зокрема, якщо диференційована функція має n нулів, то її похідна має не менш як $n - 1$ нулів.

Теорема. Ознака сталості функції. Нехай на даному проміжку функція диференційовна та $f'(x) = 0$ для будь-якої точки проміжку. Тоді функція на цьому проміжку є сталою.

Теорема. Ознака монотонності функції на інтервалі.

1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) > 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є зростаючою.

2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) < 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є спадною.

Проміжки монотонності

Якщо функція є монотонною на інтервалі, а в одному чи обох кінцях інтервалу є неперервною, то такий кінець (кінці) можна приєднати до проміжку монотонності.

Зокрема:

1) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; b)$ і неперервною в точках a та b , то вона є монотонною на відрізку $[a; b]$;

2) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; +\infty)$ або на інтервалі $(-\infty; b)$ і при цьому є неперервною в точці a або b , то вона є монотонною на інтервалі $[a; +\infty)$ або $(-\infty; b]$ відповідно.

Теорема. Властивість монотонної функції.

1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та зростає, тоді $f'(x) \geq 0$ для будь-якої точки цього інтервалу.

2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та спадає, тоді $f'(x) \leq 0$ для будь-якої точки цього інтервалу.

Заповніть порожні клітинки таблиці для заданої функції.

<i>Схема дослідження функції на монотонність та екстремуми</i>	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = x^3 - 3x^2$.
1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.	
2. Знайдіть похідну даної функції.	
3. Знайдіть критичні точки даної функції, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ або точки, в яких похідна не існує.	
4. Нанесіть критичні точки на $D(f)$ і визначте знаки похідної на кожному з утворених інтервалів.	
5. Визначте проміжки монотонності даної функції (якщо похідна додатна, то функція зростає, якщо похідна від'ємна, то функція спадає). Запишіть проміжки зростання, розділяючи їх крапкою з комою. Аналогічно зробіть для проміжків спадання.	
6. Користуючись ознаками точок максимуму та мінімуму функції, визначте точки локального екстремуму. За необхідності, знайдіть значення функції у цих точках (локальні екстремуми).	

Заповніть порожні клітинки таблиці для заданої функції.

<i>Схема знаходження найбільшого або найменшого значень неперервної функції на відрізку</i>	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = x^3 - 3x^2, [1; 3]$.
1. Знайдіть критичні точки даної функції, які належать даному відрізку.	
2. Знайдіть значення функції у всіх знайдених критичних точках та окремо на кінцях відрізка.	
3. Порівняйте знайдені значення функції та оберіть з них найбільше (найменше). Ці значення й будуть найбільшим (найменшим) значенням даної функції на відрізку.	

Означення. Другою похідною (похідною другого порядку) функції $y = f(x)$, у точці x_0 називають похідну від функції $f'(x)$ у точці x_0 : $f''(x_0) = (f'(x))'(x_0)$.

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має другу похідну у деякій точці (на деякій множині), то її називають **двічі диференційовною в цій точці (на цій множині)**. На множині, де дана функція двічі диференційовна, розглядають нову функцію $y = f''(x)$, яка ставить кожному аргументу x_0 з даної множини у відповідність значення функції, що дорівнює $f''(x_0)$.

Механічний зміст похідної функції

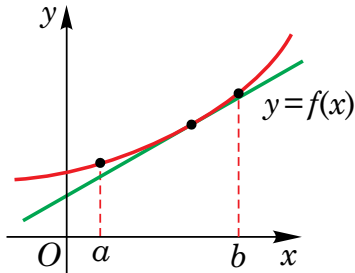
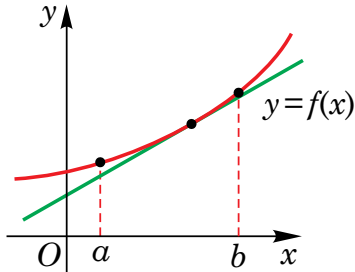
Якщо тіло рухається уздовж координатної прямої, і його положення визначається функцією $s(t)$, то його миттєва швидкість (з урахуванням напрямку) в момент часу t_0 визначається за формулою $v(t_0) = s'(t_0)$. Таким чином, $s'(t) = v(t)$.

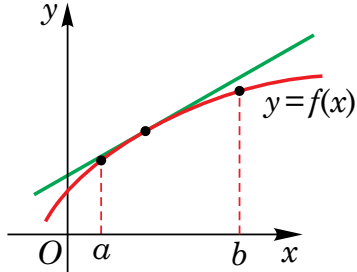
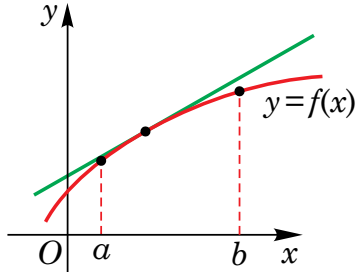
Механічний зміст другої похідної

Якщо тіло рухається уздовж координатної прямої, і його положення визначається функцією $s(t)$, то його миттєве прискорення (з урахуванням напрямку) в момент часу t_0 визначається за формулою $a(t_0) = s''(t_0)$. Таким чином, $s''(t) = a(t)$.

Ілюстративний приклад

- 1.** Тіло рухається уздовж координатної прямої, і його положення визначається функцією $s(t) = t^3 + 3t$, де s — переміщення (у метрах), t — час (в секундах.). Знайдіть миттєву швидкість тіла та його миттєве прискорення в момент часу $t_0 = 2$ с.
Відповідь. $v(t_0) = 15$ м/с, $a(t_0) = 12$ м/с².

Вид опуклості функції, диференційованої на проміжку I	Означення	Графічна ілюстрація
Опукла вниз	Графік функції на проміжку I розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.	
Строго опукла вниз	Графік функції на проміжку I розташований не нижче дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку — точку дотику.	

Вид опуклості функції, диференційованої на проміжку I	Означення	Графічна ілюстрація
Опукла вгору	Графік функції на проміжку I розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку.	
Строго опукла вгору	Графік функції на проміжку I розташований не вище дотичної до нього у будь-якій точці цього проміжку, причому має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку – точку дотику.	

Геометричний зміст похідної функції

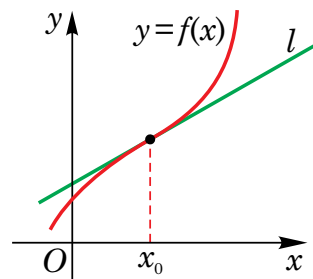
Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною в точці x_0 . Тоді $f'(x)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка $f(x)$ в цій точці до додатного напрямку осі абсцис.

Геометричний зміст другої похідної

- Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I , причому $f''(x) \geq 0$ для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на проміжку I .
- Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на проміжку I , причому $f''(x) \leq 0$ для будь-якої точки x на цьому проміжку. Тоді функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на проміжку I .

Означення. Точка x_0 називається **точкою перегину** функції $y = f(x)$, якщо дотична до графіка у точці $(x_0; f(x_0))$ переходить з одного боку дотичної на інший.

Це означає, що у точці перегину напрямок опуклості функції змінюється. Так, на рисунку при $x \leq x_0$ функція опукла вгору, а при $x \geq x_0$ функція опукла вниз.



Теорема. Необхідна умова для точки перегину. Якщо функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною в точці перегину x_0 і при цьому $f''(x)$ є неперервною в точці x_0 , то $f''(x_0) = 0$.

Теорема. Достатня умова для точки перегину. Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x_0 і має другу похідну у проколотому околі цієї точки. Якщо при переході через x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак на протилежний, то x_0 — точка перегину функції $y = f(x)$.

Заповніть порожні клітинки таблиці для заданої функції.

Схема дослідження функції на опуклість та точки перегину	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = x^3 - 3x^2$
1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.	
2. Знайдіть другу похідну даної функції та формальну область її визначення $D(f'')$.	
3. Знайдіть корені рівняння $f''(x) = 0$.	
4. Нанесіть знайдені корені на спільну частину $D(f)$ та $D(f'')$ і визначте знаки другої похідної на кожному з утворених інтервалів.	
5. Користуючись ознаками опуклості функції вниз ($f''(x) \geq 0$) і вгору ($f''(x) \leq 0$), визначте проміжки опуклості даної функції. За достатньою умовою, визначте точки перегину.	
6. Запишіть у відповідь: • проміжки опуклості вниз даної функції, розділяючи їх крапкою з комою; • проміжки опуклості вгору даної функції, розділяючи їх крапкою з комою; • точки перегину.	

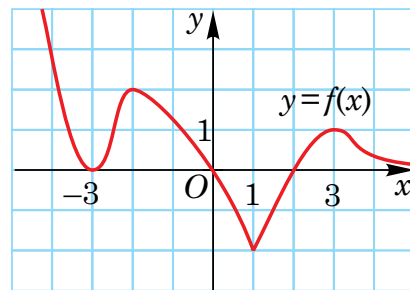
III. Перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

- Знайдіть проміжки зростання та спадання функції $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$.
Відповідь. Функція зростає на проміжку $[-1; 7]$. Функція спадає на проміжках $(-\infty; -1]; [7; +\infty)$.
- Знайдіть критичні точки функції $y = 6x^2 + x^3$.
Відповідь. $-4; 0$.
- Визначте найменше значення функції $y = 2x - \frac{1}{x^2}$ на проміжку $(-\infty; 0)$.
Відповідь. Не існує.

4. Укажіть кількість точок екстремуму функції, графік якої зображено на рисунку.

Відповідь. Чотири.



5. Подайте число 12 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб добуток квадрата одного з цих чисел на подвоєне друге число був найбільшим.

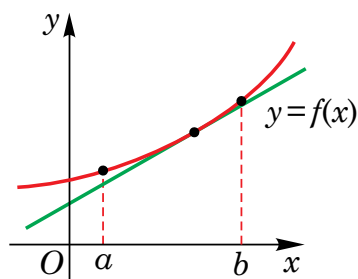
Відповідь. 4 і 8.

IV. Захист проєктів

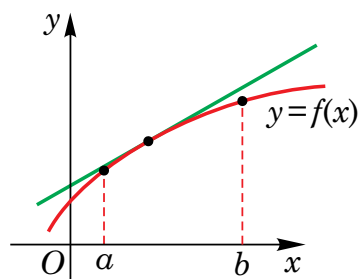
Наприклад, одна з команд може запропонувати захист проєкту «Узагальнення нерівності Єнсена та їх застосування».

Пригадаємо спочатку відомі нам факти про опуклі вниз (угору) функції та хорди їхніх графіків.

Нехай функція $f(x)$ є диференційованою на проміжку I . Тоді для функцій, опуклих униз, графік лежить не нижче будь-якої дотичної, що проведена до графіка в точці цього проміжку. Для функцій, опуклих угору, графік лежить не вище будь-якої дотичної, що проведена до графіка в точці цього проміжку.



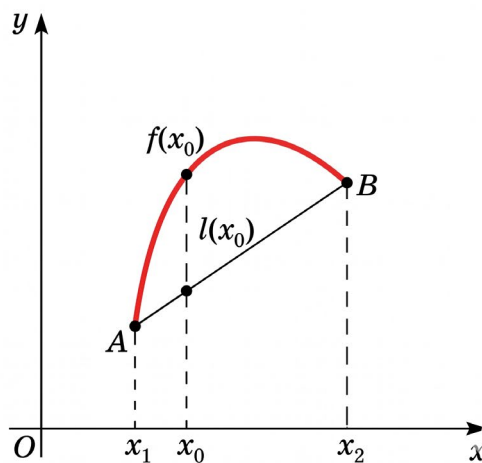
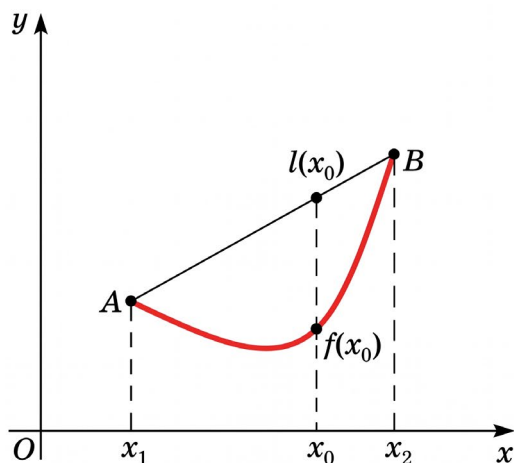
Функція, опукла угору на відрізку $[a; b]$



Функція, опукла вниз на відрізку $[a; b]$

Розглянемо хорду графіка — відрізок, що сполучає дві точки цього графіка.

Для опуклих униз функцій відповідна частина графіка лежить під цією хордою, а для опуклих угору — над нею (див. рисунки).

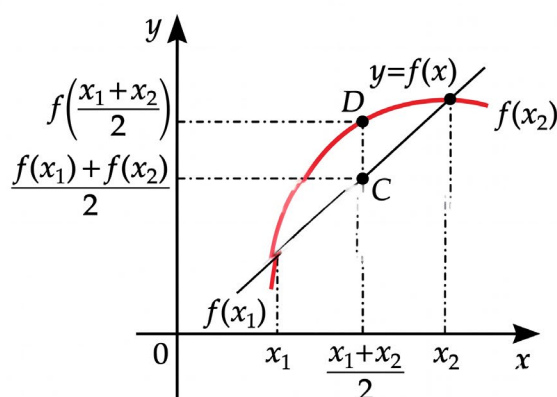
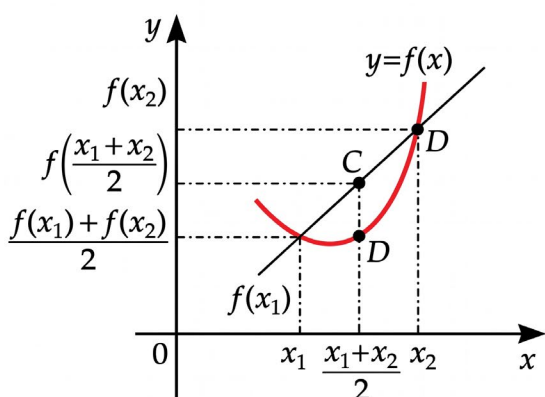


Теорема. Властивість опуклої вниз функції. Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою вниз на проміжку I . Тоді для будь-яких точок $x_1 < x_2$ цього проміжку графік функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_1; x_2]$ лежить не вище хорди AB , де $A(x_1; f(x_1))$, $B(x_2; f(x_2))$.

Теорема. Властивість опуклої вгору функції. Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на проміжку I . Тоді для будь-яких точок $x_1 < x_2$ цього проміжку графік функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_1; x_2]$ лежить не нижче хорди AB , де $A(x_1; f(x_1))$, $B(x_2; f(x_2))$.

Наслідок (властивість опуклої функції). Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою на проміжку I . Тоді для будь-яких точок x_1, x_2 цього проміжку справджується нерівність:

- $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ для випадку функції, опуклої вниз;
- $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ для випадку функції, опуклої вгору.



Даний наслідок використовується при доведенні методом математичної індукції нерівності Єнсена (у найпростішому формулюванні).

Теорема. Нерівність Єнсена. Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою на проміжку I . Тоді для будь-яких точок $x_1, x_2, \dots, x_n$ цього проміжку справджується нерівність:

- $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$ для випадку функції, опуклої вниз;
- $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$ для випадку функції, опуклої вгору.

Легко помітити, що всі «коефіцієнти» у лівій та правій частинах нерівності Єнсена однакові і дорівнюють $\frac{1}{n}$. Зрозуміло, що вони є додатними й раціональними а їхня сума дорівнює $\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_n = 1$.

Виявляється, що така властивість є основою для одного з можливих узагальнень нерівності Єнсена.

Теорема 1. Узагальнена нерівність Єнсена. Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою на проміжку I . Тоді для будь-яких точок $x_1, x_2, \dots, x_n$ цього проміжку, та будь-яких додатних раціональних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ таких, що $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, справджується нерівність:

- $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$ для випадку функції, опуклої вниз;
- $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$ для випадку функції, опуклої вгору.

Доведемо, наприклад, узагальнену нерівність Єнсена для функції $y = f(x)$, опуклої вниз на проміжку I .

Оскільки числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ є додатними та раціональними, то кожне з них можна представити у вигляді дробу з натуральними чисельниками та знаменниками:

$$\lambda_1 = \frac{p_1}{q_1}, \lambda_2 = \frac{p_2}{q_2}, \dots, \lambda_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

Зведемо ці дроби до спільного знаменника та отримаємо представлення чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ у вигляді дробів з натуральними чисельниками та однаковим натуральним знаменником:

$$\lambda_1 = \frac{P_1}{Q}, \lambda_2 = \frac{P_2}{Q}, \dots, \lambda_n = \frac{P_n}{Q}.$$

За умовою теореми, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, тому $P_1 + P_2 + \dots + P_n = Q$.

Використовуючи нерівність Єнсена у найпростішому формулюванні, отримаємо:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) &= f\left(\frac{P_1}{Q} x_1 + \frac{P_2}{Q} x_2 + \dots + \frac{P_n}{Q} x_n\right) = f\left(\frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n}{Q}\right) = \\ &= f\left(\frac{\underbrace{x_1 + x_1 + \dots + x_1}_{P_1} + \underbrace{x_2 + x_2 + \dots + x_2}_{P_2} + \dots + \underbrace{x_n + x_n + \dots + x_n}_{P_n}}{Q}\right) \leq \\ &\leq \frac{\underbrace{f(x_1) + f(x_1) + \dots + f(x_1)}_{P_1} + \underbrace{f(x_2) + f(x_2) + \dots + f(x_2)}_{P_2} + \dots + \underbrace{f(x_n) + f(x_n) + \dots + f(x_n)}_{P_n}}{Q} = \\ &= \frac{P_1}{Q} f(x_1) + \frac{P_2}{Q} f(x_2) + \dots + \frac{P_n}{Q} f(x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

За допомогою наведеної теореми можна розв'язати більш складні завдання на доведення нерівностей, ніж з використанням нерівності Єнсена у найпростішому формулюванні.

Ілюстративний приклад

- 2.** Нехай раціональні числа a, b, c — довжини сторін деякого трикутника. Доведіть, що тоді справджується нерівність:

$$\sqrt{a} \cdot (a+c-b) + \sqrt{b} \cdot (a+b-c) + \sqrt{c} \cdot (b+c-a) \leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}.$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$ та її першу й другу похідні на проміжку $(0; +\infty)$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} < 0$.

Отже, функція $f(x) = \sqrt{x}$ є опуклою вгору за ознакою на інтервалі $(0; +\infty)$.

Нехай $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$. Розглянемо також додатні раціональні коефіцієнти, сума яких дорівнює 1: $\lambda_1 = \frac{a+c-b}{a+b+c}$, $\lambda_2 = \frac{a+b-c}{a+b+c}$, $\lambda_3 = \frac{b+c-a}{a+b+c}$.

Застосуємо узагальнену нерівність Єнсена для опуклої вгору функції $f(x) = \sqrt{x}$ на $(0; +\infty)$: $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$, тобто

$$\sqrt{\frac{a+c-b}{a+b+c}a + \frac{a+b-c}{a+b+c}b + \frac{b+c-a}{a+b+c}c} \geq \frac{a+c-b}{a+b+c}\sqrt{a} + \frac{a+b-c}{a+b+c}\sqrt{b} + \frac{b+c-a}{a+b+c}\sqrt{c}.$$

Помножимо обидві частини нерівності на додатний множник $a+b+c$ і отримаємо:

$$\sqrt{(a+b+c)(a^2+ac-ab+ab+b^2-bc+cb+c^2-ac)} \geq (a+c-b)\sqrt{a} + (a+b-c)\sqrt{b} + (b+c-a)\sqrt{c}.$$

$\sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \geq (a+c-b)\sqrt{a} + (a+b-c)\sqrt{b} + (b+c-a)\sqrt{c}$, що рівносильно до нерівності, яку потрібно було довести.

Виявляється, що для диференційовних опуклих униз (угору) функцій умова раціональності коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в узагальненій нерівності Єнсена є несуттєвою. Для формулювання й доведення відповідного факту нам знадобиться наступне представлення числа на відрізку числової прямої через його кінці.

Параметризація відрізка

Нехай $x_0 \in [x_1; x_2]$, тоді знайдеться таке число $t \in [0; 1]$, що $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$.

Навпаки, при будь-якому $t \in [0; 1]$ число $x_0' = tx_1 + (1-t)x_2$ буде належати відрізку $[x_1; x_2]$.

Доведемо дані твердження.

- 1) Нехай $x_0 \in [x_1; x_2]$, $t = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$, тоді:

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}x_1 + \left(1 - \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}\right)x_2 = \frac{x_2x_1 - x_0x_1 + x_2^2 - x_1x_2 - x_2^2 + x_0x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_0(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_0.$$

- 2) Нехай $x_0' = tx_1 + (1-t)x_2$, причому $t \in [0; 1]$. Тоді:

$$x_0' = tx_1 + (1-t)x_2 \geq tx_1 + (1-t)x_1 = x_1, \quad x_0' = tx_1 + (1-t)x_2 \leq tx_2 + (1-t)x_2 = x_2$$

Звідси й випливає, що $x_0' \in [x_1; x_2]$.

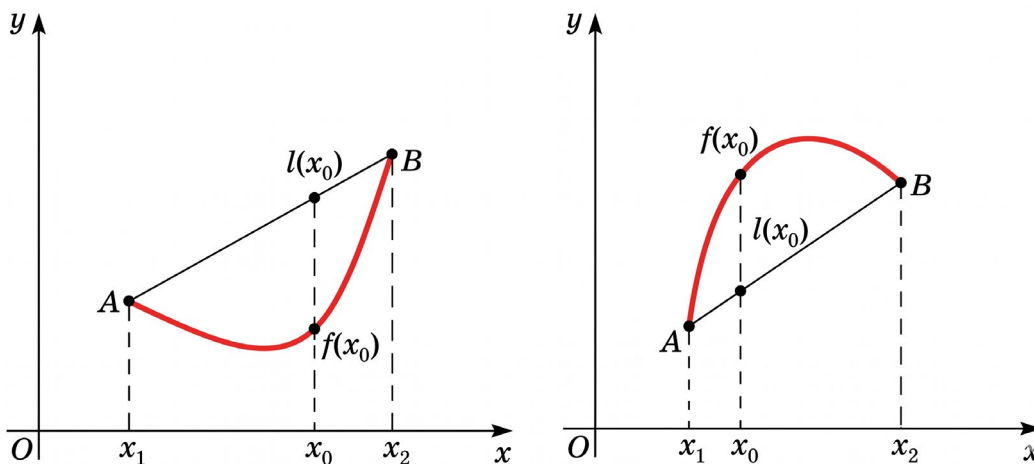
Тепер ми можемо записати властивості хорд графіка опуклої вниз (угору) функції в інший спосіб.

Теорема. Властивість опуклої функції. Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою вниз (угору) на проміжку I (див. рисунки). Тоді для будь-яких точок $x_1 < x_2$ цього проміжку графік функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_1; x_2]$ лежить не вище (не нижче) хорди AB , де $A(x_1; f(x_1)), B(x_2; f(x_2))$, тобто при будь-якому $t \in [0; 1]$ справджується нерівність:

- $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$ для випадку функції, опуклої вниз;
- $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$ для випадку функції, опуклої вгору.

Для доведення достатньо застосувати факт про параметризацію відрізка для будь-якої точки $x_0 \in [x_1; x_2]$.

З даної теореми вже неважко отримати ще одне узагальнення нерівності Єнсена.



Теорема 2. Узагальнена нерівність Єнсена. Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою на проміжку I . Тоді для будь-яких точок $x_1, x_2, \dots, x_n$ цього проміжку, та будь-яких додатних дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ таких, що $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, справджується нерівність:

- $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$ для випадку функції, опуклої вниз;
- $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$ для випадку функції, опуклої вгору.

Доведемо, наприклад, узагальнену нерівність Єнсена для функції $y = f(x)$ опуклої вниз на проміжку I .

Застосуємо метод математичної індукції.

База індукції. Якщо $n = 2$, то $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$ — нерівність справджується за доведеною властивістю опуклої вниз функції, оскільки $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$.

Індукційний перехід. Нехай розглядувана нерівність справджується при $n = k$, тоді доведемо, що вона справджується і при $n = k + 1$.

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = f\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + (\lambda_k + \lambda_{k+1}) \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_{k+1} \right)\right)$$

Оскільки $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_{k+1}$ належать проміжку I , то можна скористатися припущенням індукції та базою:

$$\begin{aligned} & f\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + (\lambda_k + \lambda_{k+1}) \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_{k+1} \right)\right) \leq \\ & \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_{k-1} f(x_{k-1}) + (\lambda_k + \lambda_{k+1}) f\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_{k+1}\right) \leq \\ & \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_{k-1} f(x_{k-1}) + (\lambda_k + \lambda_{k+1}) \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} f(x_k) + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} f(x_{k+1}) \right) = \\ & = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_{k-1} f(x_{k-1}) + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}). \end{aligned}$$

За принципом математичної індукції, узагальнену нерівність Єнсена в даному випадку доведено.

Ілюстративний приклад

3. Нехай додатні числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ є довжинами сторін деякого опуклого многокутника. Доведіть, що виконується нерівність:

$$\frac{a_1}{-a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 - a_2 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots - a_n} \geq \frac{n}{n-2}.$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ та її першу й другу похідні на проміжку

$$(0; +\infty): f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0.$$

Отже, функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ є опуклою вниз за ознакою на $(0; +\infty)$.

Нехай $x_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} - a_i + a_{i+1} + \dots + a_n$. Розглянемо також додатні дійсні коефіцієнти, сума яких дорівнює 1: $\lambda_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$.

Застосуємо узагальнену нерівність Єнсена для опуклої вниз функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на

$(0; +\infty)$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}(-a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}(a_1 + a_2 + \dots - a_n)} \leq \\ & \leq \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \cdot \frac{1}{-a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \cdot \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots - a_n}. \end{aligned}$$

Помножимо обидві частини нерівності на додатний множник $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ і отримаємо:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1(-a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \dots + a_n(a_1 + a_2 + \dots - a_n)} \leq \frac{a_1}{-a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots - a_n}$$

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{-a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots - a_n}.$$

За допомогою нерівності Єнсена для опуклої вниз функції $f(x) = x^2$ було доведено нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

З неї випливає, що $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}$. Тоді:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 =$$

$$= \frac{n-2}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Тепер завершуємо доведення:

$$\frac{a_1}{-a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots - a_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \geq$$

$$\geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{\frac{n-2}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} = \frac{n}{n-2}.$$

V. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності

6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....