

### Урок 3. Ознаки зростання та спадання функцій

#### РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

#### I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите ознаками монотонності функції;
- 2) вивчите ознаку сталості функції;
- 3) вивчите властивість похідної монотонної диференційованої функції;
- 4) навчитеся досліджувати функцію на монотонність;
- 5) познайомитеся з ідеєю застосування класичних теорем математичного аналізу для розв'язування задач ЗНО/НМТ.

#### II. Ознака сталості функції

Як ви знаєте з теореми Ферма, у точках локального екстремума диференційованої функції похідна дорівнює нулю. Але може так статися, що такі точки утворюють цілий проміжок, скінченний або нескінченний. Зрозуміло, що на такому проміжку похідна функції дорівнює нулю. Але такий випадок можливий лише за умови, що функція на даному проміжку набуває фіксованого значення.

**Теорема. Ознака сталості функції.** Нехай на даному проміжку функція диференційована та  $f'(x) = 0$  для будь-якої точки проміжку. Тоді функція на цьому проміжку є сталою.

Для доведення можна розглянути будь-які точки  $x_1 < x_2$  на даному проміжку, та застосувати теорему Лагранжа на відрізку  $[x_1; x_2]$ :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) = 0, \text{ де } x_0 \in [x_1; x_2].$$

Із цього випливає, що  $x_0$  належить даному проміжку і  $f'(x_0) = 0$ .

Отже,  $f(x_2) = f(x_1)$ .

Аналогічно можна довести, що для будь-яких точок проміжку значення функції є однаковими. З цього випливає, що на даному проміжку функція набуває лише одне значення, тобто є сталою.

**Приклад 1.** Доведіть, використовуючи методи математичного аналізу, що

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} \text{ для будь-якого дійсного значення } x.$$

**Розв'язання.** Розглянемо диференційовну функцію  $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x$  та її по-

хідну:  $y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$ .

За ознакою сталості функції,  $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = c$ , де  $c$  — фіксоване число.

Оскільки  $y(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ , то  $c = \frac{\pi}{2}$ .

Таким чином,  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$  для будь-якого дійсного значення  $x$ .

### III. Ознака зростання функції. Ознака спадання функції

**Теорема. Ознака монотонності функції на інтервалі.**

1) Нехай на даному інтервалі функція  $f(x)$  диференційована та  $f'(x) > 0$  для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є зростаючою.

2) Нехай на даному інтервалі функція  $f(x)$  диференційована та  $f'(x) < 0$  для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є спадною.

*Доведемо першу частину теореми.*

Для доведення можна розглянути будь-які точки  $x_1 < x_2$  на даному інтервалі, та застосувати теорему Лагранжа на відрізку  $[x_1; x_2]$ :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) = 0, \text{ где } x_0 \in [x_1; x_2].$$

Із цього випливає, що  $x_0$  належить даному проміжку і  $f'(x_0) > 0$ . Але  $x_2 - x_1 > 0$ .

Отже,  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ .

Із цього випливає, що на даному інтервалі функція, за означенням, зростає.

Друга частина теореми доводиться аналогічно.

**Приклад 2.** Доведіть, що функція  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2025$  є монотонною на всій множині дійсних чисел, та з'ясуйте характер монотонності (зростання чи спадання).

[illegible]

Часто при дослідженні функції на монотонність доцільно використати твердження.

**Твердження.** Якщо функція є монотонною на інтервалі, а в одному чи обох кінцях інтервалу є неперервною, то такий кінець (кінці) можна приєднати до проміжку монотонності.

### Зокрема:

- 1) якщо функція є монотонною на інтервалі  $(a; b)$  і неперервною в точках  $a$  та  $b$ , то вона є монотонною на відрізку  $[a; b]$ ;
- 2) якщо функція є монотонною на інтервалі  $(a; +\infty)$  або на інтервалі  $(-\infty; b)$  і при цьому є неперервною в точках  $a$  або  $b$ , то вона є монотонною на інтервалі  $[a; +\infty)$  або  $(-\infty; b]$  відповідно.

*Доведення.* Нехай функція  $y = f(x)$  зростає на  $(a; b)$  і є неперервною в точці  $b$ . Доведемо, що тоді  $y = f(x)$  зростає на  $(a; b]$ .

Припустимо, що це не так, тобто існує точка  $x_1 \in (a; b)$ , для якої  $f(x_1) \geq f(b)$ . Оскільки функція  $y = f(x)$  зростає на  $(a; b)$ , то для будь-якого  $x_2 \in (x_1; b)$  маємо, що  $f(x_2) > f(b)$ .

Функція  $y = f(x)$  є неперервною в точці  $b$ , тому для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке число  $\delta > 0$ , що при всіх  $x \in (b - \delta; b)$  справджується нерівність  $f(b) - \varepsilon < f(x) < f(b) + \varepsilon$ .

Розглянемо  $\varepsilon = f(x_2) - f(b)$ , тоді при всіх  $x \in (b - \delta; b)$  справджується нерівність  $f(x) < f(b) + f(x_2) - f(b) \Leftrightarrow f(x) < f(x_2)$ .

Якщо розглянути будь-яке значення  $x$ , яке більше за  $x_2$  і входить до інтервалу  $(b - \delta; b)$ , то, в силу зростання функції  $y = f(x)$  на  $(a; b)$ , маємо:  $f(x) > f(x_2)$ , що суперечить отриманій вище нерівності  $f(x) < f(x_2)$ .

Отже, функція  $y = f(x)$  зростає на  $(a; b]$ .

Друга частина твердження доводиться аналогічно.

## IV. Властивість монотонної функції

**Теорема. Властивість монотонної функції.**

- 1) Нехай на даному інтервалі функція  $f(x)$  диференційовна та зростає, тоді  $f'(x) \geq 0$  для будь-якої точки цього інтервалу.
- 2) Нехай на даному інтервалі функція  $f(x)$  диференційовна та спадає, тоді  $f'(x) \leq 0$  для будь-якої точки цього інтервалу.

*Доведемо перше твердження теореми.*

Нехай  $x_0$  є точкою даного інтервалу. При  $x \in (x_0; x_0 + \delta)$  розглянемо додатний приріст аргументу  $\Delta x = x - x_0$  та дріб  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ .

За означенням зростаючої функції, чисельник дробу буде додатним, тому  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ .

При  $x \in (x_0 - \delta; x_0)$  розглянемо від'ємний приріст аргументу  $\Delta x = x - x_0$  та дріб  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ .

За означенням зростаючої функції, чисельник дробу буде від'ємним, тому  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ .

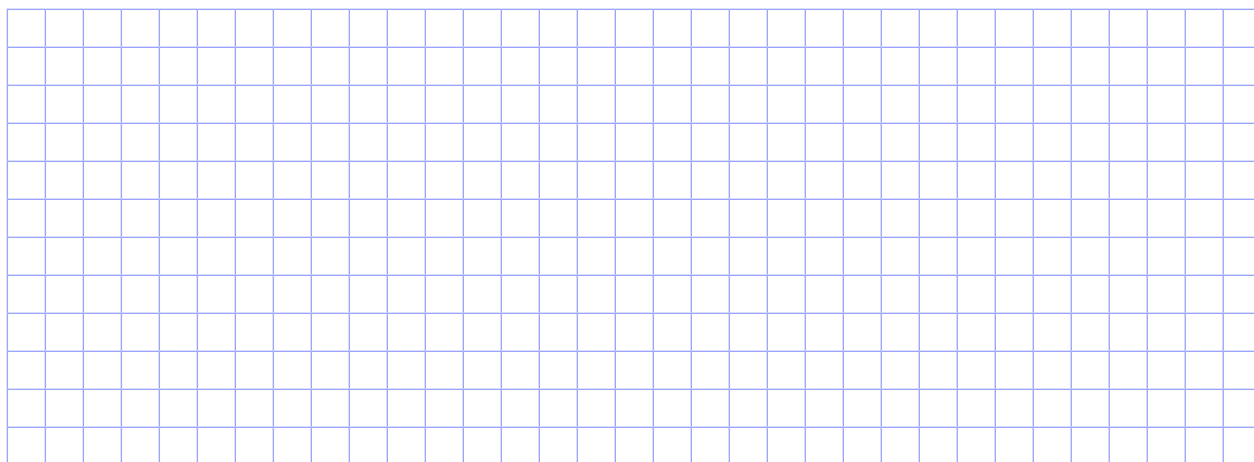
Розглянемо границю функції  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , скористаємося диференційовністю функції  $f(x)$  у точці  $x_0$  та теоремою про перехід до границі в нерівності:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0.$$

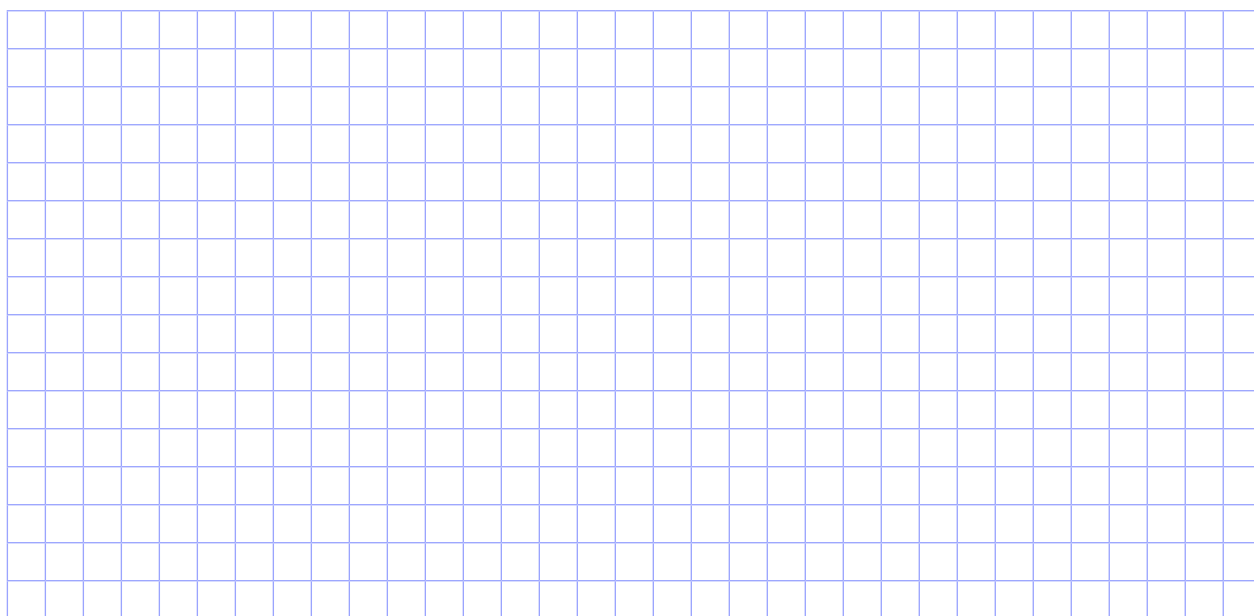
Друге твердження теореми доводиться аналогічно.

## V. Приклади застосування теорем (ознак). Дослідження функції на монотонність

**Приклад 3.** Дослідіть функцію  $f(x) = 4 + 3x^2 - x^3$  на монотонність.



**Приклад 4.** Розв'яжіть рівняння  $x^9 - 2x^5 + 4x - 3 = 0$ .



## VI. Розв'язання практичної задачі

**Задача.** Графіком функції  $y = f(x)$  є парабола з вершиною у початку координат. Обчисліть  $f(2,5)$ , якщо  $f'(1) = -4$ .

## VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

### Рівень А

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції:  
1)  $y = x^3 + 6x^2$ ;                      2)  $y = 3x^4 + 4x^3$ ;                      3)  $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ .
2. Дослідіть функцію на монотонність:  
1)  $y = 3 + 24x - 3x^2 - x^3$ ;                      2)  $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ ;                      3)  $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$ .
3. Доведіть, що функція є монотонною:  
1)  $y = 2x^5 + 4x^3 + 3x + 7$ ;                      2)  $y = 5 - 3x - 6x^3 - 7x^5$ ;                      3)  $y = \cos x + 2x$ .
4. При яких значеннях параметра  $a$  функція зростає на області визначення:  
1)  $f(x) = x^3 - ax$ ;                      2)  $f(x) = x^5 + ax$ ;                      3)  $f(x) = \sin x + ax$ .
5. При яких значеннях параметра  $a$  функція спадає на області визначення:  
1)  $f(x) = 3ax - x^3$ ;                      2)  $f(x) = 10ax - x^5$ ;                      3)  $f(x) = 2\sin x - ax$ .
6. Відомо, що диференційовна функція  $f(x)$  зростає на проміжку  $(-\infty; 1)$  та спадає на проміжку  $(1; +\infty)$ . Порівняйте з нулем значення виразу:  
1)  $f'(0)$ ;                      2)  $f'(1)$ ;                      3)  $f'(5)$ .

### Рівень В

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції:  
1)  $y = (x+1)^2 \cdot (x+5)^2$ ;                      2)  $y = x^2 + \frac{2}{x}$ ;                      3)  $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x - 6$ .
2. Дослідіть функцію на монотонність:  
1)  $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$ ;                      2)  $y = \sqrt{x^2 + 6x}$ ;                      3)  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ .
3. Доведіть, що функція є монотонною:  
1)  $y = 12x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 30x + 1$ ;                      2)  $y = \cos^2 x - 3x$ ;  
3)  $y = \sin^2 x + 4x$ .
4. Дослідіть функцію на зростання та спадання, враховуючи її періодичність та область визначення:  
1)  $y = \sin x - \frac{x\sqrt{2}}{2}$ ;                      2)  $y = \cos 2x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ;                      3)  $y = \operatorname{tg} x - 2x$ .
5. При яких значеннях параметра  $a$  функція зростає:  
1)  $f(x) = ax - 2\sqrt{1-x}$  при  $x \leq 1$ ;  
2)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2(a+1)x^2 + 9x - 10$  при  $x \in \mathbb{R}$ ;  
3)  $y = \operatorname{tg} x - ax$  при  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

- 6.** При яких значеннях параметра  $a$  функція спадає:
- 1)  $f(x) = 3\sqrt{2-x} - ax$  при  $x \leq 2$ ;
  - 2)  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - 4x + 1$  при  $x \in \mathbb{R}$ ;
  - 3)  $y = \operatorname{ctg} x + ax$  при  $x \in (0; \pi)$ ?
- 7.** Знайдіть проміжки монотонності функції:
- 1)  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ ;
  - 2)  $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$ ;
  - 3)  $f(x) = \sin x + \cos x - x$ .
- 8.** Знайдіть точки локального екстремуму періодичної функції  $f(x) = \sin^2 x - \cos x$ .
- 9.** Розв'яжіть рівняння:
- 1)  $x^5 + 4x + \cos x = 1$ ;
  - 2)  $x^5 + 3x + \sin x = 0$ ;
  - 3)  $x^5 + 2x + \cos^2 x - 1 = 0$ .
- 10.** Доведіть тотожність:
- 1)  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ;
  - 2)  $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ;
  - 3)  $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- 11.** Доведіть нерівність  $\operatorname{tg} x \geq x$ , якщо  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ . При яких значеннях  $x$  із даного проміжку у нерівності досягається рівність?
- 12.** Розв'яжіть нерівність  $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$ .

### Рівень С

- 1.** Знайдіть проміжки зростання та спадання функції  $y = \frac{(x^2 + x - 4)^3}{3} - 4x^2 - 4x$ .
- 2.** Дослідіть функцію на монотонність:  $y = \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{(x^2 + x - 2)^2}$ .
- 3.** Доведіть тотожність  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$
- 4.** Для функції  $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{5x^3}{6} + 3x^2 - x + 2$  знайдіть проміжки монотонності її похідної.
- 5.** Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких функція
- $$f(x) = (a-12)x^3 + 3(a-12)x^2 + 6x - 24$$
- зростає на множині дійсних чисел.
- 6.** Доведіть, що для кутів гострокутного трикутника  $\alpha, \beta, \gamma$  справджується нерівність:  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma > 2\pi$ .

## Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

.....  
.....  
.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....  
.....  
.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....  
.....  
.....

