

Урок 3. Ознаки зростання та спадання функцій

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Ознака сталості функції.
2. Ознака зростання функції. Ознака спадання функції.
3. Властивість монотонної функції.
4. Приклади застосування теорем (ознак). Дослідження функції на монотонність.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Сформулюйте задачу із ЗНО/НМТ. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Важливим етапом уроку є формулювання та доведення теореми про монотонність диференційовної функції в залежності від знаку її похідної на інтервалі. Доведення впродовж уроку теорем про монотонність функції на відрізку чи інтервалі залишається на розсуд вчителя.
- 4) Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 5) Один із етапів уроку спрямований на висвітлення практичної значущості наслідків з теореми Лагранжа — для дослідження диференційовних функцій на монотонність.

7) Наприкінці уроку запропонуйте учням/ученицям розв'язати практичну задачу як групу активність, сформульовану на початку уроку. Впродовж розв'язування задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу.

8) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

9) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

10) Основним елементом уроку є ознайомлення учнів/учениць із наслідками класичних теорем про застосування похідної та алгоритмом дослідження функції на монотонність.

11) Додатково подається властивість похідної монотонної функції.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Що таке стала функція? Як виглядає її графік?

2) Як пов'язаний знак похідної функції та монотонність тієї самої функції?

3) Чи можна однозначно визначити знак похідної монотонної функції?

4) Як за допомогою похідної дослідити диференційовну функцію на монотонність?

Як я вирішую певну проблему із ЗНО/НМТ 2025 року?

Задача. Графіком функції $y = f(x)$ є парабола з вершиною у початку координат. Обчисліть $f(2,5)$, якщо $f'(1) = -4$.

II. Ознака сталості функції

Як ви знаєте з теореми Ферма, у точках локального екстремума диференційованої функції похідна дорівнює нулю. Але може так статися, що такі точки утворюють цілий проміжок, скінченний або нескінченний. Зрозуміло, що на такому проміжку похідна функції дорівнює нулю. Але такий випадок можливий лише за умови, що функція на даному проміжку набуває фіксованого значення.

Теорема. Ознака сталості функції. Нехай на даному проміжку функція диференційована та $f'(x) = 0$ для будь-якої точки проміжку. Тоді функція на цьому проміжку є сталою.

Для доведення можна розглянути будь-які точки $x_1 < x_2$ на даному проміжку, та застосувати теорему Лагранжа на відрізку $[x_1; x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) = 0, \text{ де } x_0 \in [x_1; x_2].$$

Із цього випливає, що x_0 належить даному проміжку і $f'(x_0) = 0$.

Отже, $f(x_2) = f(x_1)$.

Аналогічно можна довести, що для будь-яких точок проміжку значення функції є однаковими. З цього випливає, що на даному проміжку функція набуває лише одне значення, тобто є сталою.

Ілюстративний приклад

- 1.** Доведіть, використовуючи методи математичного аналізу, що $\arctg x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$ для будь-якого дійсного значення x .

Розв'язання. Розглянемо диференційовну функцію $y = \arctg x + \operatorname{arccctg} x$ та її по-

хідну: $y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$.

За ознакою сталості функції, $y = \arctg x + \operatorname{arccctg} x = c$, де c — фіксоване число.

Оскільки $y(1) = \arctg 1 + \operatorname{arccctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, то $c = \frac{\pi}{2}$.

Таким чином, $\arctg x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$ для будь-якого дійсного значення x .

III. Ознака зростання функції. Ознака спадання функції

Теорема. Ознака монотонності функції на інтервалі.

- 1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) > 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є зростаючою.
- 2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) < 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є спадною.

Доведемо першу частину теореми.

Для доведення можна розглянути будь-які точки $x_1 < x_2$ на даному інтервалі, та застосувати теорему Лагранжа на відрізку $[x_1; x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) = 0, \text{ де } x_0 \in [x_1; x_2].$$

Із цього випливає, що x_0 належить даному проміжку і $f'(x_0) > 0$. Але $x_2 - x_1 > 0$.

Отже, $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Із цього випливає, що на даному інтервалі функція, за означенням, зростає.

Друга частина теореми доводиться аналогічно.

Ілюстративний приклад

- 2.** Доведіть, що функція $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2025$ є монотонною на всій множині дійсних чисел, та з'ясуйте характер монотонності (зростання чи спадання).

Доведення. Розглянемо похідну даної функції: $y' = x^2 + x + 1$.

Оскільки $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, то $y' > 0$ при всіх дійсних значеннях x .

За ознакою монотонності функції на інтервалі, функція $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2025$ є зростаючою при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Часто при дослідженні функції на монотонність доцільно використати твердження.

Твердження. Якщо функція є монотонною на інтервалі, а в одному чи обох кінцях інтервалу є неперервною, то такий кінець (кінці) можна приєднати до проміжку монотонності.

Зокрема:

- 1) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; b)$ і неперервною в точках a та b , то вона є монотонною на відрізку $[a; b]$;
- 2) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; +\infty)$ або на інтервалі $(-\infty; b)$ і при цьому є неперервною в точках a або b , то вона є монотонною на інтервалі $[a; +\infty)$ або $(-\infty; b]$ відповідно.

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ зростає на $(a; b)$ і є неперервною в точці b . Доведемо, що тоді $y = f(x)$ зростає на $(a; b]$.

Припустимо, що це не так, тобто існує точка $x_1 \in (a; b)$, для якої $f(x_1) \geq f(b)$. Оскільки функція $y = f(x)$ зростає на $(a; b)$, то для будь-якого $x_2 \in (x_1; b)$ маємо, що $f(x_2) > f(b)$.

Функція $y = f(x)$ є неперервною в точці b , тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що при всіх $x \in (b - \delta; b)$ справджується нерівність $f(b) - \varepsilon < f(x) < f(b) + \varepsilon$.

Розглянемо $\varepsilon = f(x_2) - f(b)$, тоді при всіх $x \in (b - \delta; b)$ справджується нерівність $f(x) < f(b) + f(x_2) - f(b) \Leftrightarrow f(x) < f(x_2)$.

Якщо розглянути будь-яке значення x , яке більше за x_2 і входить до інтервалу $(b - \delta; b)$, то, в силу зростання функції $y = f(x)$ на $(a; b)$, маємо: $f(x) > f(x_2)$, що суперечить отриманій вище нерівності $f(x) < f(x_2)$.

Отже, функція $y = f(x)$ зростає на $(a; b]$.

Друга частина твердження доводиться аналогічно.

Ілюстративний приклад

3. Доведіть, використовуючи методи математичного аналізу, що функція $y = \arcsin x$ є зростаючою на всій області визначення.

Розв'язання. Розглянемо неперервну на всій області визначення $[-1; 1]$ функцію

$$y = \arcsin x \text{ та її похідну при } x \in (-1; 1): y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Зрозуміло, що при $x \in (-1; 1)$ маємо $y' > 0$, а тому $y = \arcsin x$ зростає на $(-1; 1)$.

Ураховуючи неперервність даної функції в точках -1 та 1 , отримуємо остаточно, що функція $y = \arcsin x$ є зростаючою на відрізку $[-1; 1]$, тобто на всій області визначення.

IV. Властивість монотонної функції

Теорема. Властивість монотонної функції.

1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційовна та зростає, тоді $f'(x) \geq 0$ для будь-якої точки цього інтервалу.

2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційовна та спадає, тоді $f'(x) \leq 0$ для будь-якої точки цього інтервалу.

Доведемо перше твердження теореми.

Нехай x_0 є точкою даного інтервалу. При $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ розглянемо додатний приріст аргументу $\Delta x = x - x_0$ та дріб $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

За означенням зростаючої функції, чисельник дробу буде додатним, тому $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$.

При $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ розглянемо від'ємний приріст аргументу $\Delta x = x - x_0$ та дріб $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

За означенням зростаючої функції, чисельник дробу буде від'ємним, тому $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$.

Розглянемо границю функції $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$, скористаємося диференційовністю функції $f(x)$ у точці x_0 та теоремою про перехід до границі в нерівності:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0.$$

Друге твердження теореми доводиться аналогічно.

V. Приклади застосування теорем (ознак). Дослідження функції на монотонність

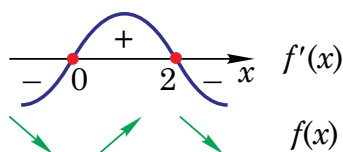
Ілюстративні приклади

4. Дослідіть функцію $f(x) = 4 + 3x^2 - x^3$ на монотонність.

Розв'язання. Дана функція визначена та є диференційовна на множині дійсних чисел. Знайдемо її похідну: $f'(x) = 6x - 3x^2$.

Знайдемо її нулі та визначимо проміжки знакосталості, використовуючи метод інтервалів. $6x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x(2 - x) = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

$$f'(x) = 3x(2 - x).$$



З ознак монотонності функції отримуємо два інтервали, на яких функція спадає: $(-\infty; 0)$ та $(2; +\infty)$, та один інтервал, на якому функція зростає: $(0; 2)$.

Оскільки функція $f(x) = 4 + 3x^2 - x^3$ є неперервною в точках 0 і 2, то остаточно отримуємо:

- функція зростає на проміжку $[0; 2]$;
- функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0]$; $[2; +\infty)$.

Відповідь. Функція зростає на проміжку $[0; 2]$. Функція спадає на кожному з інтервалів $(-\infty; 0]$; $[2; +\infty)$.

- 5.** Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ на монотонність.

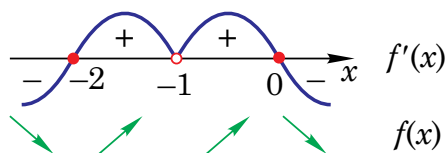
Розв'язання. Дана функція визначена та диференційовна на множині

$$(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty). \text{ Знайдемо її похідну: } f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - 1 \cdot x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

Знайдемо нулі похідної та визначимо проміжки знакосталості, використовуючи метод інтервалів.

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -2.$$

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$



З ознак монотонності функції отримуємо два інтервали, на яких функція спадає: $(-\infty; -2)$ та $(0; +\infty)$, та два інтервали, на яких функція зростає: $(-2; -1)$ і $(-1; 0)$.

Оскільки функція $f(x) = 4 + 3x^2 - x^3$ є неперервною в точках 0 і -2, то остаточно отримуємо:

- функція зростає на проміжках $[-2; -1)$; $(-1; 0]$;
- функція спадає на проміжках $(-\infty; -2]$; $[0; +\infty)$.

Відповідь. Функція зростає на проміжках $[-2; -1)$; $(-1; 0]$. Функція спадає на проміжках $(-\infty; -2]$; $[0; +\infty)$.

- 6.** Розв'яжіть рівняння $x^9 - 2x^5 + 4x - 3 = 0$.

Розв'язання. Легко побачити, що $x_0 = 1$ є коренем даного рівняння.

$$\text{Дійсно, } 1^9 - 2 \cdot 1^5 + 4 \cdot 1 - 3 = 0.$$

Доведемо, що інших коренів у даного рівняння немає.

Розглянемо функцію $f(x) = x^9 - 2x^5 + 4x - 3$ та дослідимо її на монотонність.

Дана функція визначена та є диференційовною на множині дійсних чисел. Знайдемо її похідну: $f'(x) = 9x^8 - 10x^4 + 4$. Дослідимо знак цієї похідної.

$$\text{Нехай } x^4 = t, \text{ тоді } 9x^8 - 10x^4 + 4 = 9t^2 - 10t + 4.$$

Коефіцієнт при t^2 отриманого тричлена є додатним, а дискримінант $D = 100 - 4 \cdot 9 \cdot 4$ — від'ємним, тому відповідна парабола розташована вітками вгору і над віссю Ox . Тому даний тричлен набуває тільки додатних значень.

Отже, $f'(x) > 0$ при всіх дійсних значеннях x , а тому $f(x)$ зростає на множині дійсних чисел.

З цього випливає, що рівняння $f(x) = 0$ має не більше одного кореня.

Таким чином, $x_0 = 1$ буде єдиним коренем даного рівняння.

Відповідь. 1.

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Задача. Графіком функції $y = f(x)$ є парабола з вершиною у початку координат. Обчисліть $f(2,5)$, якщо $f'(1) = -4$.

Розв'язання. Оскільки графіком функції $y = f(x)$ є парабола з вершиною у початку координат, то ця функція — квадратична, що задається формулою виду $y = ax^2$. Тоді формула для її похідної має вигляд: $y' = 2ax$. Тому $y'(1) = 2a \cdot 1 = 2a$. За умовою, $2a = -4$, тобто $a = -2$.

Звідси $y = -2x^2$, а тому $f(2,5) = -2 \cdot 2,5^2 = -2 \cdot 6,25 = -12,5$.

Відповідь. $-12,5$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції:

1) $y = x^3 + 6x^2$; 2) $y = 3x^4 + 4x^3$; 3) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$.

2. Дослідіть функцію на монотонність:

1) $y = 3 + 24x - 3x^2 - x^3$; 2) $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$; 3) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$.

3. Доведіть, що функція є монотонною:

1) $y = 2x^5 + 4x^3 + 3x + 7$; 2) $y = 5 - 3x - 6x^3 - 7x^5$; 3) $y = \cos x + 2x$.

4. При яких значеннях параметра a функція зростає на області визначення:

1) $f(x) = x^3 - ax$; 2) $f(x) = x^5 + ax$; 3) $f(x) = \sin x + ax$.

5. При яких значеннях параметра a функція спадає на області визначення:

1) $f(x) = 3ax - x^3$; 2) $f(x) = 10ax - x^5$; 3) $f(x) = 2\sin x - ax$.

6. Відомо, що диференційовна функція $f(x)$ зростає на проміжку $(-\infty; 1)$ та спадає на проміжку $(1; +\infty)$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $f'(0)$; 2) $f'(1)$; 3) $f'(5)$.

Рівень В

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції:

1) $y = (x+1)^2 \cdot (x+5)^2$; 2) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; 3) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x - 6$.

2. Дослідіть функцію на монотонність:

1) $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$; 2) $y = \sqrt{x^2 + 6x}$; 3) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

- 3.** Доведіть, що функція є монотонною:
- 1) $y = 12x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 30x + 1$;
 - 2) $y = \cos^2 x - 3x$;
 - 3) $y = \sin^2 x + 4x$.
- 4.** Дослідіть функцію на зростання та спадання, враховуючи її періодичність та області визначення:
- 1) $y = \sin x - \frac{x\sqrt{2}}{2}$;
 - 2) $y = \cos 2x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$;
 - 3) $y = \operatorname{tg} x - 2x$.
- 5.** При яких значеннях параметра a функція зростає:
- 1) $f(x) = ax - 2\sqrt{1-x}$ при $x \leq 1$;
 - 2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2(a+1)x^2 + 9x - 10$ при $x \in \mathbb{R}$;
 - 3) $y = \operatorname{tg} x - ax$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?
- 6.** При яких значеннях параметра a функція спадає:
- 1) $f(x) = 3\sqrt{2-x} - ax$ при $x \leq 2$;
 - 2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - 4x + 1$ при $x \in \mathbb{R}$;
 - 3) $y = \operatorname{ctg} x + ax$ при $x \in (0; \pi)$?
- 7.** Знайдіть проміжки монотонності функції:
- 1) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$;
 - 2) $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$;
 - 3) $f(x) = \sin x + \cos x - x$.
- 8.** Знайдіть точки локального екстремуму періодичної функції $f(x) = \sin^2 x - \cos x$.
- 9.** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $x^5 + 4x + \cos x = 1$;
 - 2) $x^5 + 3x + \sin x = 0$;
 - 3) $x^5 + 2x + \cos^2 x - 1 = 0$.
- 10.** Доведіть тотожність:
- 1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;
 - 2) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
 - 3) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- 11.** Доведіть нерівність $\operatorname{tg} x \geq x$, якщо $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. При яких значеннях x із даного проміжку у нерівності досягається рівність?
- 12.** Розв'яжіть нерівність $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$.

Рівень С

- 1.** Знайдіть проміжки зростання та спадання функції $y = \frac{(x^2 + x - 4)^3}{3} - 4x^2 - 4x$.
- 2.** Дослідіть функцію на монотонність: $y = \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{(x^2 + x - 2)^2}$.
- 3.** Доведіть тотожність $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$

4. Для функції $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{5x^3}{6} + 3x^2 - x + 2$ знайдіть проміжки монотонності її похідної.
5. Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція

$$f(x) = (a-12)x^3 + 3(a-12)x^2 + 6x - 24$$
зростає на множині дійсних чисел.
6. Доведіть, що для кутів гострокутного трикутника α, β, γ справджується нерівність: $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma > 2\pi$.

VIII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

.....

(-) що залишилося незрозумілим:

.....

(?) що здивувало або зацікавило:

.....

