

Урок 4. Урок —практикум. Застосування ознак зростання та спадання функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся застосовувати ознаки зростання та спадання диференційовної функції;
- 2) досліджувати функцію на монотонність за допомогою похідної;
- 3) застосовувати похідну для доведення нерівностей;
- 4) застосовувати похідну для розв'язування рівнянь та нерівностей.

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Знайдіть проміжки зростання функції $y = x^3 + 6x^2$.
2. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = x^3 - ax$ зростає на області визначення?
3. Відомо, що диференційована функція $f(x)$ зростає на проміжку $(-\infty; 1)$ та спадає на проміжку $(1; +\infty)$. Порівняйте з нулем значення виразу $f'(1)$.
4. Знайдіть проміжки монотонності функції $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$.
5. Дослідіть характер монотонності функції $y = \sin^2 x + 4x$ на всій області її визначення (зростає, спадає, не є монотонною).

Задачі для обговорення

1. Розв'яжіть рівняння $x^5 + 4x + \cos x = 1$.
Вказівка. Функція $y = x^5 + 4x + \cos x - 1$ зростає на множині дійсних чисел і кожне своє значення набуває тільки один раз;
2. Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція
$$f(x) = (a - 12)x^3 + 3(a - 12)x^2 + 6x - 24$$
зростає на множині дійсних чисел.
Вказівка. Похідна функції має бути додатною, або дорівнювати нулю в деяких точках. Окремо доцільно розглянути випадок $a = 12$.
3. Доведіть, що для кутів гострокутного трикутника α, β, γ справджується нерівність: $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma > 2\pi$.
Вказівка. За допомогою ознак монотонності функції та нерівності Коші можна довести, що для будь-якого $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справджується нерівність $\sin x + \operatorname{tg} x - 2x > 0$.

III. Робота в малих групах. Знаходження проміжків зростання та спадання функцій

Теорема. Ознака монотонності функції на інтервалі.

- 1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) > 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є зростаючою.
- 2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) < 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є спадною.

Часто при дослідженні функції на монотонність доцільно використати твердження.

Твердження. Якщо функція є монотонною на інтервалі, а в одному чи обох кінцях інтервалу є неперервною, то такий кінець (кінці) можна приєднати до проміжку монотонності.

Зокрема:

- 1) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; b)$ і неперервною в точках a та b , то вона є монотонною на відрізку $[a; b]$;
- 2) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; +\infty)$ або на інтервалі $(-\infty; b)$ і при цьому є неперервною в точках a або b , то вона є монотонною на інтервалі $[a; +\infty)$ або $(-\infty; b]$ відповідно.

Завдання для роботи в малих групах.

Заповніть схему дослідження функції на монотонність, обґрунтовуючи кожний етап для двох прикладів у таблиці. Обговоріть труднощі, які можуть виникнути при реалізації всіх етапів. Підтвердіть проведені дослідження за допомогою побудови відповідних графіків, наприклад, у програмі GeoGebra.

Схема дослідження функції на монотонність		
Етапи дослідження	Приклад 1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.	Приклад 2. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 3}$.
1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.		
2. Знайдіть похідну даної функції та формальну область її визначення $D(f')$.		
3. Знайдіть корені рівняння $f'(x) = 0$.		
4. Нанесіть знайдені корені на спільну частину $D(f)$ та $D(f')$ і визначте знаки похідної на кожному з утворених інтервалів.		
5. Користуючись ознаками монотонності функції на інтервалі та зауваженням до них, визначте проміжки зростання та спадання даної функції.		
6. Запишіть у відповідь проміжки зростання, розділяючи їх крапкою з комою. Аналогічно зробіть для проміжків спадання.	$f \uparrow x \in$ $f \downarrow x \in$	$f \uparrow x \in$ $f \downarrow x \in$

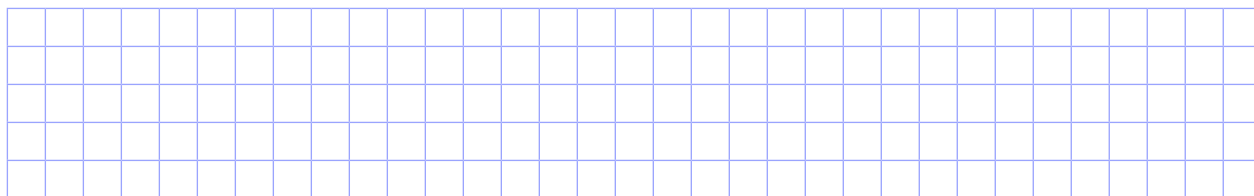
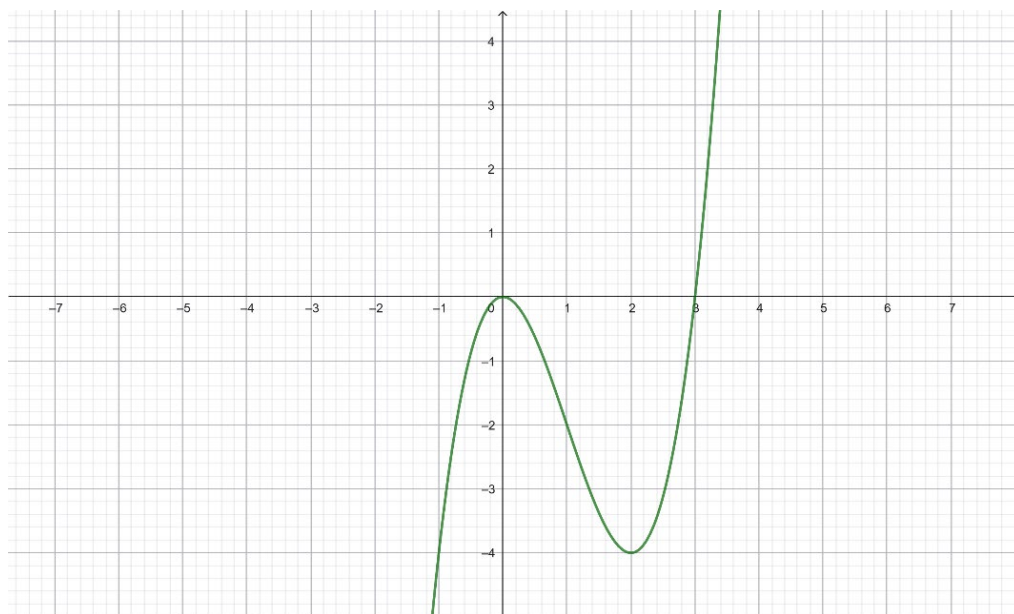
IV. Робота в парах. Дослідження монотонності функцій

Задачі для роботи в парах

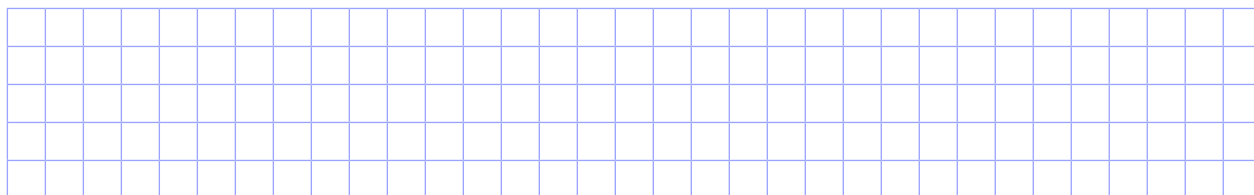
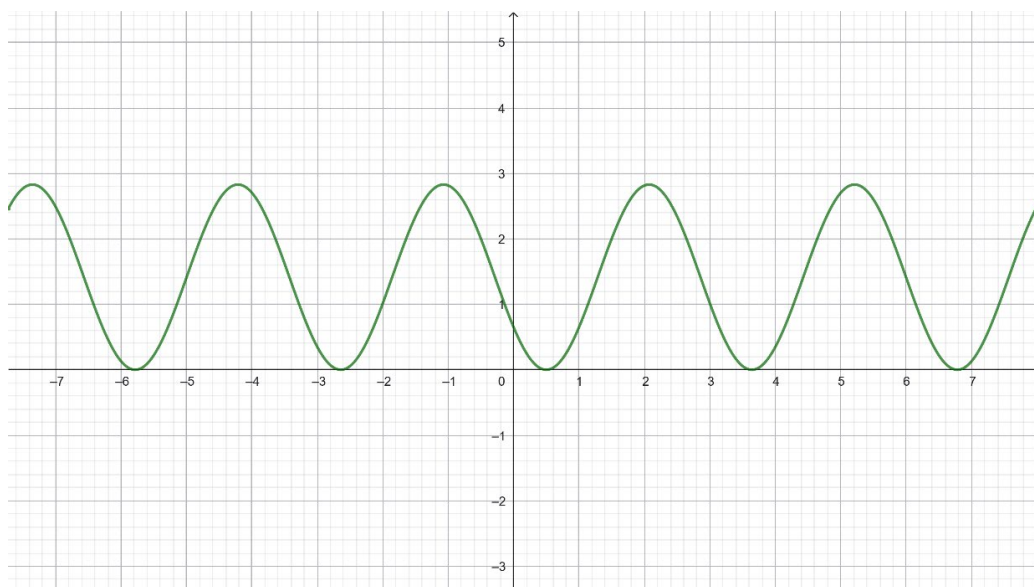
- Дослідіть функцію на монотонність: $f(x) = x^5 - 15x^3 + 8$.
- Дослідіть функцію на монотонність та доведіть нерівність: $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
- Дослідіть функцію на монотонність та розв'яжіть рівняння: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$.

V. Розв'язування завдань на зростання та спадання функцій за графіками похідних функцій

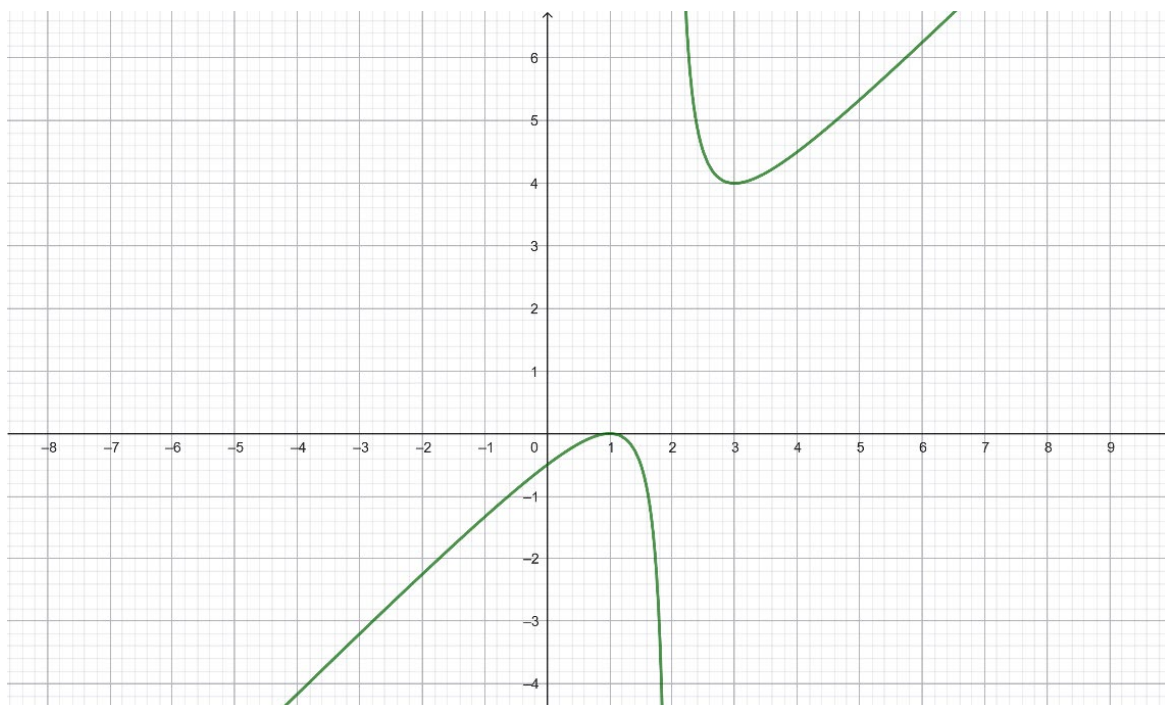
Приклад 1. Дослідіть диференційовну функцію на монотонність, використовуючи графік її похідної, поданий нижче.



Приклад 2. За графіком похідної диференційовної функції встановіть, чи є дана функція монотонною.



Приклад 3. Дано графік похідної функції, що є неперервною на множині дійсних чисел і диференційовною в усіх точках, окрім однієї. Знайдіть точку, у якій дана функція не має похідної. Дослідіть функцію на зростання та спадання.

[illegible]

VI. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему із ЗНО/НМТ 2025 року?

Задача. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 10, & x < -2; \\ 4x^2 + 3x, & x \geq -2. \end{cases}$

Обчисліть значення виразу $f(-4) - f'(2)$.

Рефлексія

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я знаю ознаки зростання/спадання функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію застосовувати ознаки зростання/спадання функції для дослідження монотонності. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію застосовувати монотонність функції для доведення нерівностей. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

