

Урок 4. Урок —практикум. Застосування ознак зростання та спадання функцій

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в малих групах. Знаходження проміжків зростання та спадання функцій.
3. Робота в парах. Дослідження монотонності функцій.
4. Розв'язування завдань на зростання та спадання функцій за графіками похідних функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям письмову перевірку відповідей до нескладних номерів домашнього завдання. За необхідності зробіть аналіз якихось із запропонованих завдань.
- 2) Обговоріть фронтально важливі задачі домашнього завдання. За необхідності, використайте опитування біля дошки або інші форми роботи.
- 3) Об'єднайте учнівство в кілька груп. Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу.
- 4) Учні/учениці об'єднуються в пари і працюють над наступною серією завдань. Учитель виступає у ролі консультанта та порадики. Важливим елементом роботи є набуття навичок самоперевірки та взаємоперевірки.
- 5) Завдання деяких етапів є складними для учнів/учениць. Тому доцільно розбирати їх разом, методом «мозкового штурму», під керівництвом вчителя.

- 6) Наприкінці уроку пропонуйте учням/ученицям розв'язати практичну задачу, сформульовану на початку уроку як групову активність.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язати завдання, запропоновані на різних етапах уроку.
- 8) Основна мета уроку — формування умінь та навичок щодо дослідження функцій на монотонність за допомогою похідної.
- 9) Додаткова мета уроку — застосування похідної для розв'язання рівнянь та доведення нерівностей.
- 10) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

Як я вирішую певну проблему із ЗНО/НМТ 2025 року?

Задача. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 10, & x < -2; \\ 4x^2 + 3x, & x \geq -2. \end{cases}$

Обчисліть значення виразу $f(-4) - f'(2)$.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Знайдіть проміжки зростання функції $y = x^3 + 6x^2$.
Відповідь. $(-\infty; -4]$; $[0; +\infty)$.
2. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = x^3 - ax$ зростає на області визначення?
Відповідь. $(-\infty; 0]$.
3. Відомо, що диференційована функція $f(x)$ зростає на проміжку $(-\infty; 1)$ та спадає на проміжку $(1; +\infty)$. Порівняйте з нулем значення виразу $f'(1)$.
Відповідь. $f'(1) = 0$.
4. Знайдіть проміжки монотонності функції $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$.
Відповідь. $f \uparrow x \in (-\infty; 0)$; $[\sqrt[3]{2}; +\infty)$, $f \downarrow x \in (0; \sqrt[3]{2}]$.
5. Дослідіть характер монотонності функції $y = \sin^2 x + 4x$ на всій області її визначення (зростає, спадає, не є монотонною).
Відповідь. Функція зростає.

Задачі для обговорення

1. Розв'яжіть рівняння $x^5 + 4x + \cos x = 1$.
Вказівка. Функція $y = x^5 + 4x + \cos x - 1$ зростає на множині дійсних чисел і кожне своє значення набуває тільки один раз;
Відповідь. 0.
2. Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція
$$f(x) = (a - 12)x^3 + 3(a - 12)x^2 + 6x - 24$$
зростає на множині дійсних чисел.
Вказівка. Похідна функції має бути додатною, або дорівнювати нулю в деяких точках. Окремо доцільно розглянути випадок $a = 12$.
Відповідь. $[12; 14)$.
3. Доведіть, що для кутів гострокутного трикутника α, β, γ справджується нерівність: $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma > 2\pi$.
Вказівка. За допомогою ознак монотонності функції та нерівності Коші можна довести, що для будь-якого $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справджується нерівність $\sin x + \operatorname{tg} x - 2x > 0$.

III. Робота в малих групах. Знаходження проміжків зростання та спадання функцій

Теорема. Ознака монотонності функції на інтервалі.

- 1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) > 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є зростаючою.
- 2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) < 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є спадною.

Часто при дослідженні функції на монотонність доцільно використати твердження.

Твердження. Якщо функція є монотонною на інтервалі, а в одному чи обох кінцях інтервалу є неперервною, то такий кінець (кінці) можна приєднати до проміжку монотонності.

Зокрема:

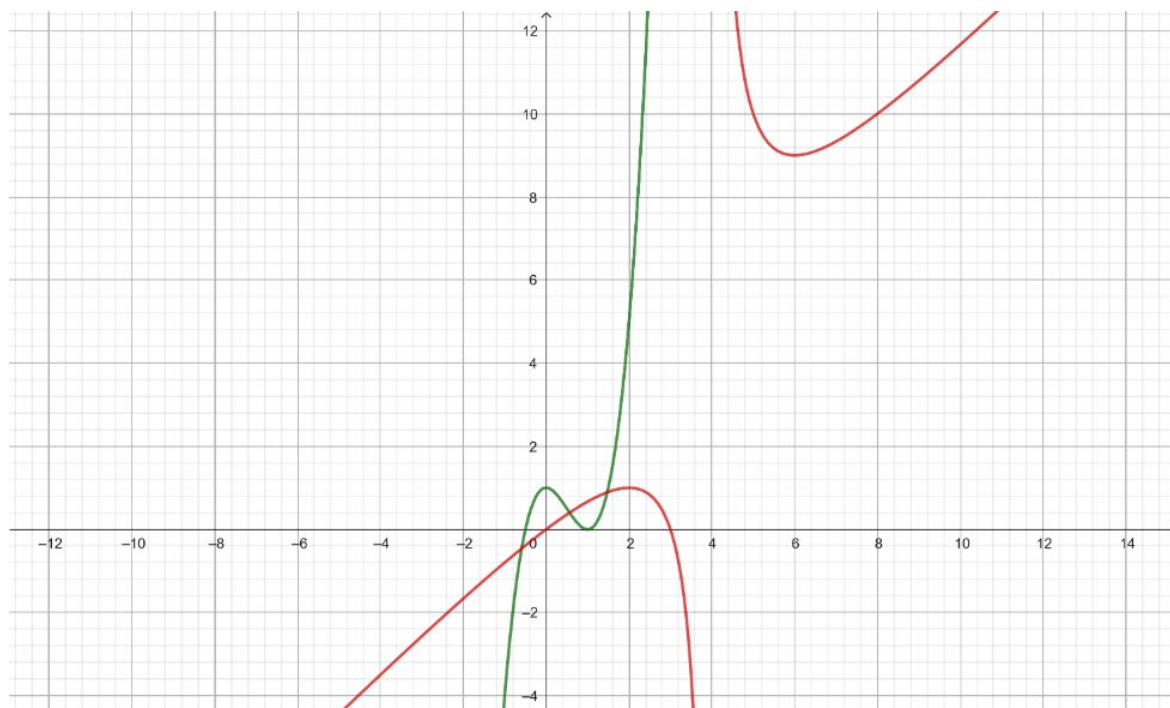
- 1) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; b)$ і неперервною в точках a та b , то вона є монотонною на відрізку $[a; b]$;
- 2) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; +\infty)$ або на інтервалі $(-\infty; b)$ і при цьому є неперервною в точках a або b , то вона є монотонною на інтервалі $[a; +\infty)$ або $(-\infty; b]$ відповідно.

Завдання для роботи в малих групах.

Заповніть схему дослідження функції на монотонність, обґрунтовуючи кожний етап для двох прикладів у таблиці. Обговоріть труднощі, які можуть виникнути при реалізації всіх етапів. Підтвердіть проведені дослідження за допомогою побудови відповідних графіків, наприклад, у програмі GeoGebra.

Схема дослідження функції на монотонність		
Етапи дослідження	Приклад 1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.	Приклад 2. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 3}$.
1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.		
2. Знайдіть похідну даної функції та формальну область її визначення $D(f')$.		
3. Знайдіть корені рівняння $f'(x) = 0$.		
4. Нанесіть знайдені корені на спільну частину $D(f)$ та $D(f')$ і визначте знаки похідної на кожному з утворених інтервалів.		
5. Користуючись ознаками монотонності функції на інтервалі та зауваженням до них, визначте проміжки зростання та спадання даної функції.		
6. Запишіть у відповідь проміжки зростання, розділяючи їх крапкою з комою. Аналогічно зробіть для проміжків спадання.	$f \uparrow x \in$ $f \downarrow x \in$	$f \uparrow x \in$ $f \downarrow x \in$

Графік функції побудовано на рисунку.



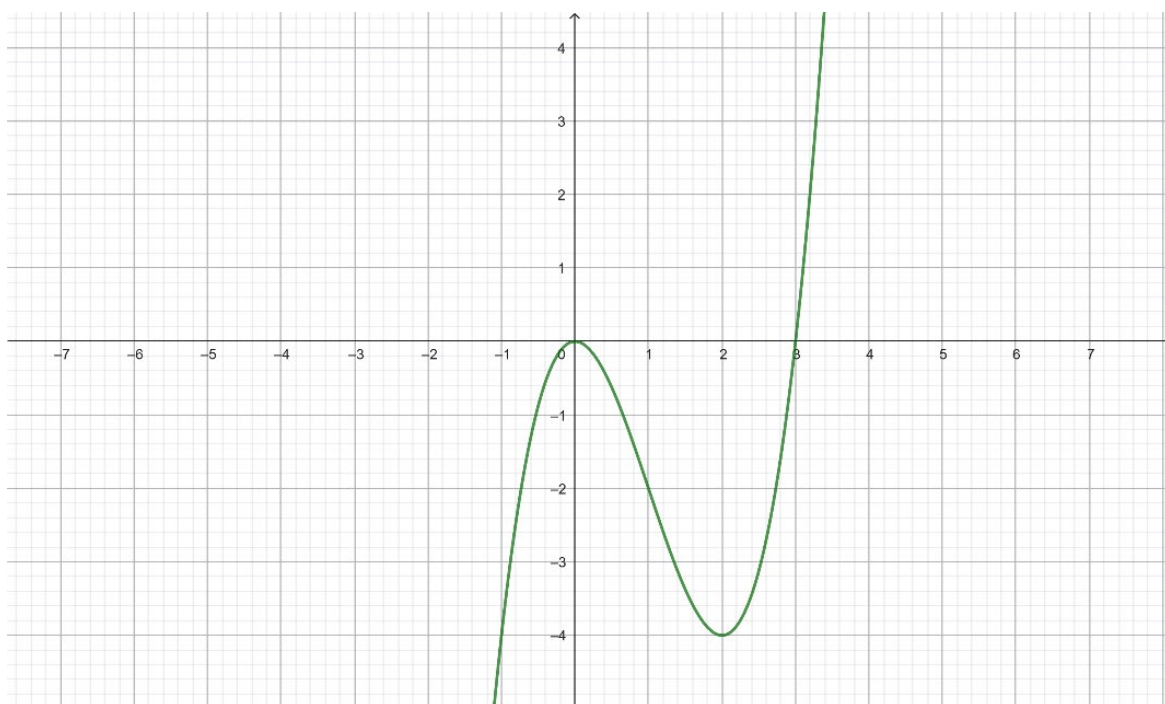
IV. Робота в парах. Дослідження монотонності функцій

Задачі для роботи в парах

4. Дослідіть функцію на монотонність: $f(x) = x^5 - 15x^3 + 8$.
5. Дослідіть функцію на монотонність та доведіть нерівність: $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
6. Дослідіть функцію на монотонність та розв'яжіть рівняння: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$.

V. Розв'язування завдань на зростання та спадання функцій за графіками похідних функцій

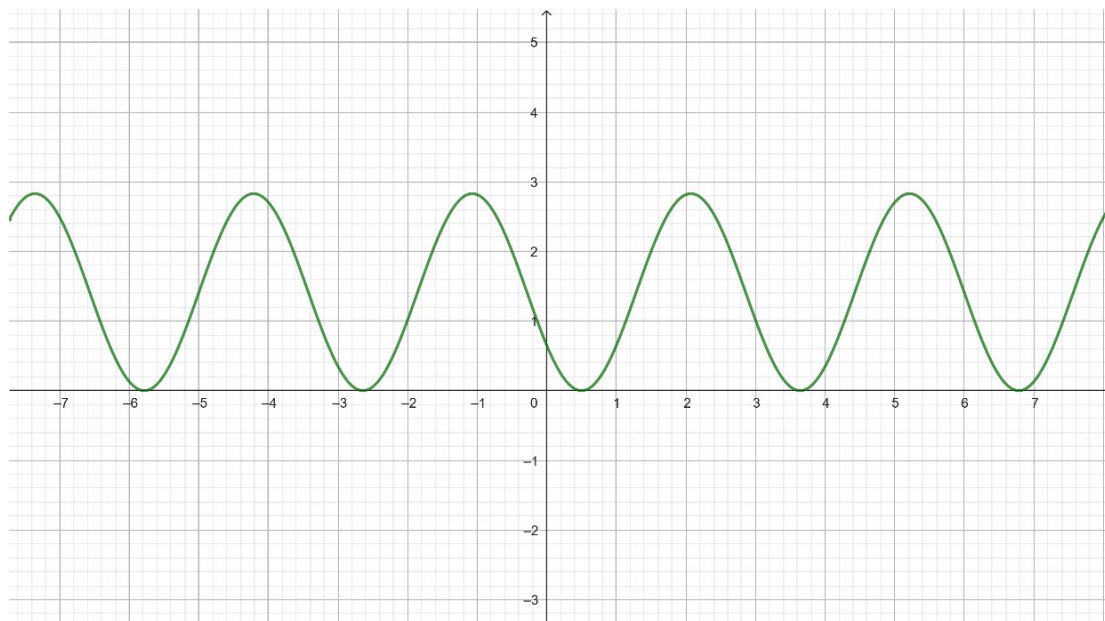
7. Дослідіть диференційовну функцію на монотонність, використовуючи графік її похідної, поданий нижче.



Розв'язання. З урахуванням поданого графіка отримуємо, що функція має додатну похідну при $x \in (3; +\infty)$ і від'ємну похідну при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$, нульову похідну при $x = 0, x = 3$.

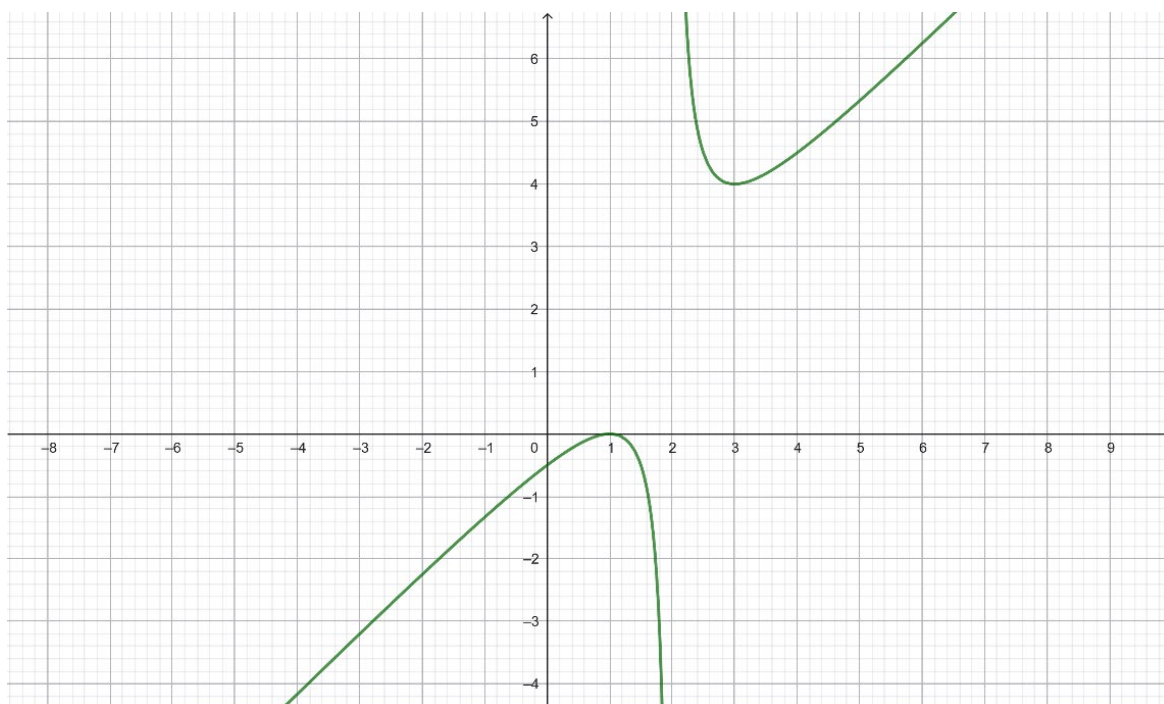
Із урахуванням ознак монотонності функції, а також виходячи з неперервності диференційованої функції, отримуємо висновок: функція зростає при $x \in [3; +\infty)$, функція спадає при $x \in (-\infty; 3]$.

8. За графіком похідної диференційовної функції встановіть, чи є дана функція монотонною.



Розв'язання. Із графіка отримуємо, що функція має додатну похідну при $x \in \dots \cup (x_0; x_1) \cup (x_1; x_2) \cup (x_2; x_3) \cup \dots$ нульову похідну при $\dots, x = x_0; x = x_1; x = x_2; \dots$. З урахуванням ознак монотонності функції а також виходячи з неперервності диференційованої функції, отримуємо висновок: функція зростає на кожному з проміжків $\dots [x_0; x_1]; [x_1; x_2]; [x_2; x_3]; \dots$, а тому є зростаючою на множині дійсних чисел.

9. Дано графік похідної функції, що є неперервною на множині дійсних чисел і диференційовною в усіх точках, окрім однієї. Знайдіть точку, у якій дана функція не має похідної. Дослідіть функцію на зростання та спадання.



Розв'язання. Точка, в якій функція неперервна, але не має похідної — це $x_0 = 2$. При $x \in (2; +\infty)$ функція має додатну похідну. Ураховуючи неперервність функції в точці $x_0 = 2$ маємо, що функція зростає при $x \in [2; +\infty)$. Також функція має ну-

льову похідну при $x = 1$ і при цьому має від'ємну похідну для $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2)$.
Ураховуючи неперервність функції в точках $x = 1$ та $x = 2$ отримуємо, що функція спадає при $x \in (-\infty; 2]$.

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему із ЗНО/НМТ 2025 року?

Задача. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 10, & x < -2; \\ 4x^2 + 3x, & x \geq -2. \end{cases}$

Обчисліть значення виразу $f(-4) - f'(2)$.

Розв'язання. Оскільки $-4 < -2$, то $f(-4) = 10$.

Оскільки $2 \geq -2$, та $(4x^2 + 3x)' = 8x + 3$, то $f'(2) = 8 \cdot 2 + 3 = 19$.

Отже, $f(-4) - f'(2) = 10 - 19 = -9$.

Відповідь. -9 .

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я знаю ознаки зростання/спадання функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію застосовувати ознаки зростання/спадання функції для дослідження монотонності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію застосовувати монотонність функції для доведення нерівностей. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію застосовувати монотонність функції для розв'язування рівнянь. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію досліджувати функцію на монотонність за графіком її похідної. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію поведінку диференційовної функції та властивості її похідної. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |