

Урок 5. Урок–практикум. Розв’язування задач. Ознаки зростання та спадання функцій

План уроку

1. Знаходження проміжків зростання та спадання функцій.
2. Розв’язування задач на зростання та спадання функцій з параметрами.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Об’єднайте учнівство в кілька груп. Вони змагатимуться у швидкому розв’язуванні стандартних завдань, пов’язаних із дослідженням функцій на монотонність. Оцінюванню підлягає як правильність, так і швидкість виконання завдань. Упродовж розв’язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички.
- 2) Завдання деяких етапів є складними для учнів/учениць. Тому доцільно розбирати їх разом, методом «мозкового штурму», під керівництвом вчителя.
- 3) Наприкінці уроку пропонуйте учням/ученицям розв’язати практичну задачу, сформульовану на початку уроку, як групову активність.
- 4) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв’язати завдання, запропоновані на різних етапах уроку.
- 5) Основна мета уроку — формування умінь та навичок щодо дослідження функцій на монотонність за допомогою похідної.
- 6) Додаткова мета уроку — застосування похідної для розв’язання рівнянь та доведення нерівностей.

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2018 року?

Задача. Знайдіть похідну функції $f(x) = x(x^3 + 1)$.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Робота в малих групах. Знаходження проміжків зростання та спадання функцій

Теорема. Ознака монотонності функції на інтервалі.

- 1) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) > 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є зростаючою.
- 2) Нехай на даному інтервалі функція $f(x)$ диференційована та $f'(x) < 0$ для будь-якої точки інтервалу. Тоді функція на цьому інтервалі є спадною.

Часто при дослідженні функції на монотонність доцільно використати твердження.

Твердження. Якщо функція є монотонною на інтервалі, а в одному чи обох кінцях інтервалу є неперервною, то такий кінець (кінці) можна приєднати до проміжку монотонності.

Зокрема:

- 1) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; b)$ і неперервною в точках a та b , то вона є монотонною на відрізку $[a; b]$;
- 2) якщо функція є монотонною на інтервалі $(a; +\infty)$ або на інтервалі $(-\infty; b)$ і при цьому є неперервною в точках a або b , то вона є монотонною на інтервалі $[a; +\infty)$ або $(-\infty; b]$ відповідно.

Етапи дослідження функції на монотонність

1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.
2. Знайдіть похідну даної функції та формальну область її визначення $D(f')$.
3. Знайдіть корені рівняння $f'(x) = 0$.
4. Нанесіть знайдені корені на спільну частину $D(f)$ та $D(f')$ і визначте знаки похідної на кожному з утворених інтервалів.
5. Користуючись ознаками монотонності функції на інтервалі та зауваженням до них, визначте проміжки зростання та спадання даної функції.
6. Запишіть у відповідь проміжки зростання, розділяючи їх крапкою з комою. Аналогічно зробіть для проміжків спадання.

Задачі для роботи в малих групах

1. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}$.

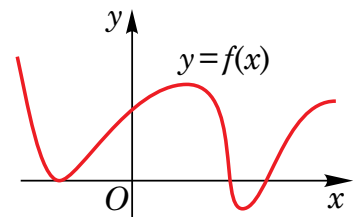
А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]; [5; +\infty)$	$[1; 5]$	$[1; 3); [5; +\infty)$	$(3; +\infty)$	$[1; 3)$

2. Знайдіть проміжки спадання функції $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$.

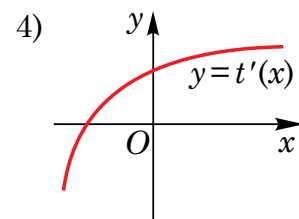
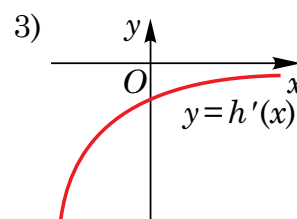
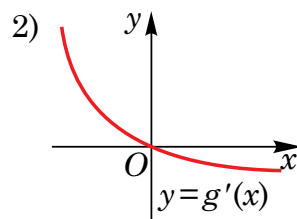
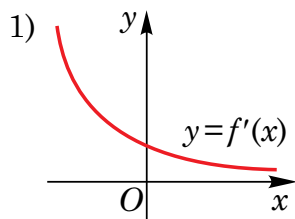
А	Б	В	Г	Д
$[-1; -0,5]$	$[-0,25; 0,25]$	$[-0,5; 0]$	$[-0,75; -0,25]$	$[0; 0,5]$

3. Дано графік диференційовної функції. Знайдіть найменшу можливу кількість інтервалів, на яких дана функція має від'ємну похідну.

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	чотири



4. На рисунках зображено графіки похідних чотирьох диференційовних функцій. Яка з даних функцій спадає на множині дійсних чисел?



А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	жодна з наведених

5. На рисунку зображено графік квадратичної функції $y = f(x)$. Серед наведених графіків укажіть графік функції $y = f'(x)$.

А	Б	В	Г	Д

6. Дослідіть дану функцію на монотонність: $y = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 5$.

Відповіді. 1. А. 2. В. 3. В. 4. В. 5. А.

6. $f \uparrow x \in [-0,25; 0]; [1; +\infty)$; $f \downarrow x \in (-\infty; -0,25]; [0; 1]$;

III. Розв'язування задач на зростання та спадання функцій з параметрами

Задачі для розв'язання методом «мозкового штурму»

1. При яких значеннях параметра a функція $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + 16x - 1$ зростає на множині дійсних чисел?

Розв'язання. Знайдемо похідну даної функції: $y' = x^2 + ax + 16$. Її графіком є парабола вітками вгору. Отже, якщо дискримінант відповідного квадратного тричлена є від'ємним, то значення похідної буде додатним. Якщо дискримінант дорівнює нулю, то значення похідної буде додатним в усіх точках, окрім вершини параболи, у якій значення похідної дорівнює 0. У обох випадках дана в умові функція буде зростати на множині дійсних чисел.

Розглянемо відповідну умову для дискримінанта:

$$D = a^2 - 4 \cdot 16 = a^2 - 64 \leq 0, \text{ тобто } a \in [-8; 8].$$

Якщо ж дискримінант буде додатним, то квадратний тричлен має два корені і при $x \in (x_1; x_2)$ квадратний тричлен набуває від'ємних значень. А тоді на цьому інтервалі дана в умові функція буде спадати.

Відповідь. $a \in [-8; 8]$.

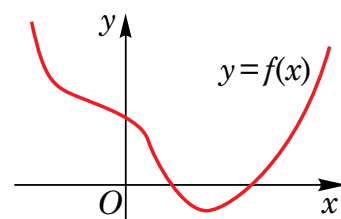
2. На рисунку зображено графік функції $y = x^4 - x^2 + bx + c$. Визначте знаки параметрів b та c .

Розв'язання. Зрозуміло, що ордината точки перетину графіка з віссю ординат є значенням функції при $x = 0$: $y(0) = 0^4 - 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. За графіком, отримаємо, що $y(0) = c > 0$.

Знайдемо похідну даної функції: $y' = 4x^3 - 2x + b$.

За графіком, отримуємо, що $x = 0$ належить інтервалу спадання функції, а тому $y'(0) < 0$. Маємо: $y'(0) = 4 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 + b = b < 0$.

Відповідь. $c > 0$, $b < 0$.



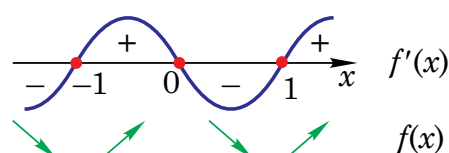
3. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $4x^6 - 6x^4 = a$ має точно два різних корені.

Розв'язання. Розглянемо диференційовну, отже, й неперервну функцію

$y = f(x) = 4x^6 - 6x^4$. Дослідимо її на монотонність:

$$y' = 24x^5 - 24x^3 = 24x^3(x^2 - 1) = 24x^3(x+1)(x-1),$$

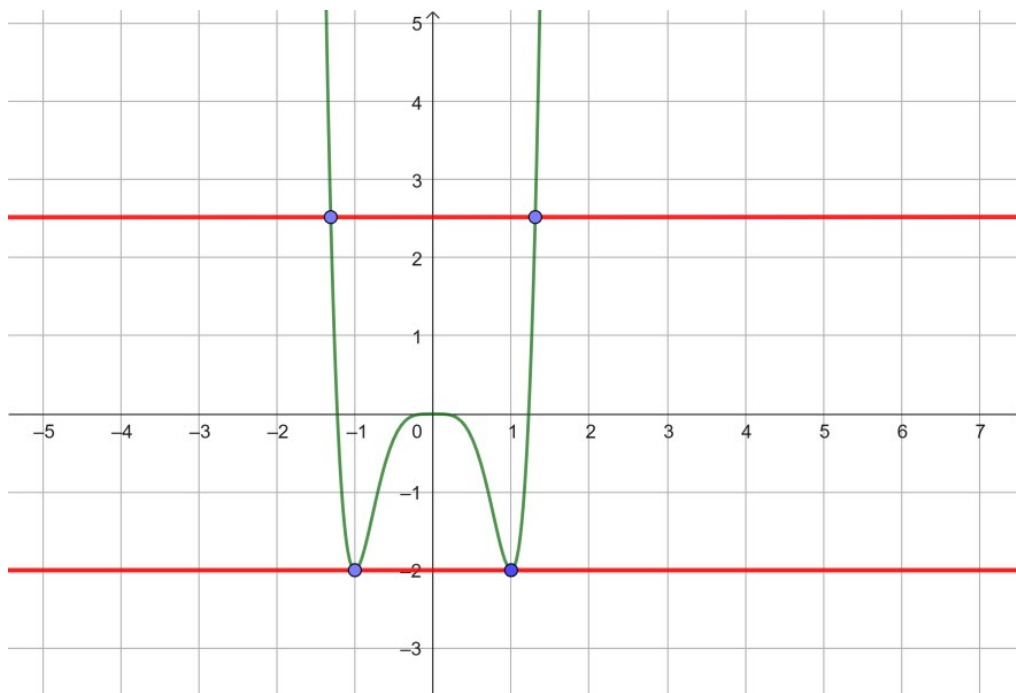
$$y' = 0, \text{ звідси } x = -1, x = 0, x = 1.$$



Оскільки $y(-1) = y(1) = -2$; $y(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, то функція $y = 4x^6 - 6x^4$ спадає на проміжку $(-\infty; -1]$ і набуває на ньому всіх значень, не менших від -2 ,

до того ж по одному разу. Аналогічно, на проміжку $[-1; 0]$ функція зростає і набуває по одному разу всіх значень з відрізка $[-2; 0]$. На проміжку $[0; 1]$ функція спадає і набуває по одному разу всіх значень з відрізка $[-2; 0]$, а при аргументах із проміжку $[1; +\infty)$ функція зростає і набуває по одному разу всіх значень, не менших від -2 , причому по одному разу.

Пряма $y = a$ перетинатиме графік функції $y = f(x) = 4x^6 - 6x^4$ двічі, якщо $a = -2$ або $a > 0$ (див. рисунок).



Відповідь. $a = -2$ або $a > 0$.

4. При яких значеннях параметрів a та b значення виразу $\frac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$ не залежить від x ?

Розв'язання. Вираз не залежить від змінної x , тобто набуває однакових значень, на області визначення функції $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$, за умови, що $f'(x) = 0$ на області визначення.

$$\text{Маємо: } f'(x) = \frac{(2ax + b)(x^2 + bx + a) - (2x + b)(ax^2 + bx + 1)}{(x^2 + bx + a)^2} = 0,$$

$b(a-1)x^2 + 2(a^2-1)x + b(a-1) = 0$ при всіх дійсних числах, окрім, можливо, одного чи двох значень — нулів знаменника даної функції.

Якщо в лівій частині отриманого рівняння міститься квадратний тричлен, то воно має не більше двох розв'язків — такий випадок не задовольняє умову.

Отже, коефіцієнт при x^2 має дорівнювати нулю.

1) При $a = 1$ ліва частина рівняння тотожно дорівнюватиме нулю.

2) При $b = 0, a \neq 1$ ліва частина рівняння дорівнюватиме $2(a^2 - 1)x$ і тотожно дорівнює нулю при $a = -1$.

Відповідь. При $a = 1, b \in \mathbb{R}$ або $b = 0, a = -1$.

IV. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2018 року?

Задача. Знайдіть похідну функції $f(x) = x(x^3 + 1)$.

Розв'язання.

Перший спосіб. Знайдемо похідну добутку і спростимо отриманий результат:

$$f'(x) = 1 \cdot (x^3 + 1) + x(3x^2) = 4x^3 + 1.$$

Другий спосіб. Розкриємо дужки та знайдемо похідну багаточлена:

$$f(x) = x(x^3 + 1) = x^4 + x, f'(x) = 4x^3 + 1.$$

Відповідь: $4x^3 + 1$.

V. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?
-
-