

Урок 6. Урок — рактикум. Розв'язування рівнянь, систем рівнянь та доведення нерівностей за ознаками зростання та спадання функцій. Доведення тотожностей

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся застосовувати ознаки зростання та спадання функції для розв'язування рівнянь та систем рівнянь;
- 2) навчитеся застосовувати ознаки зростання та спадання функції для доведення нерівностей;
- 3) навчитеся застосовувати монотонність функції для доведення тотожностей;
- 4) застосовувати похідну для розв'язування комплексних завдань з алгебри та математичного аналізу.

II. Робота в малих групах. Розв'язування рівнянь та систем рівнянь із застосуванням монотонності функції

Завдання для роботи в малих групах

Заповніть пропуски у прикладах застосування дослідження функції на монотонність для розв'язування рівнянь та систем рівнянь. Обговоріть труднощі, які можуть виникнути при реалізації трьох представлених нижче ідей. Проілюструйте ідеї розв'язання даних рівнянь та систем рівнянь за допомогою побудови відповідних графіків, наприклад, у програмі GeoGebra. Перевірте за допомогою графіків аналітичні міркування та/або розв'язки.

**Застосування монотонності функцій
для розв'язування рівнянь та систем рівнянь**

Метод розв'язання	Приклад
Якщо функція $f(x)$ зростаюча (спадна), і при цьому $f(x_0) = c$, то $x = x_0$ — єдиний розв'язок рівняння $f(x) = c$.	Розв'яжіть рівняння $x + \frac{1}{1+x^2} = 1,5$. Розглянемо функцію $f(t) = t + \frac{1}{t^2+1}$. Доведемо, що функція $f(t)$ є монотонною. Помітимо, що $f(1) = 1,5$. <i>Відповідь.</i>
Якщо функція $f(x)$ зростаюча, а функція $g(x)$ спадна, і при цьому $f(x_0) = g(x_0)$, то $x = x_0$ — єдиний розв'язок рівняння $f(x) = g(x)$.	Розв'яжіть рівняння $x^9 + 3x + \sin 2x = 1 - x^7 - x^5 - (x+1)^3$. Розглянемо функції $f(x) = x^9 + 3x + \sin 2x$ та $g(x) = 1 - x^7 - x^5 - (x+1)^3$ і доведемо, що перша з них зростає, а друга — спадає на множині дійсних чисел. Помітимо, що $f(x_0) = g(x_0)$ при $x_0 =$ <i>Відповідь.</i>

**Застосування монотонності функцій
для розв'язування рівнянь та систем рівнянь**

Метод розв'язання	Приклад
Якщо функція $f(x)$ зростаюча (спадна), то із рівності $f(a) = f(b)$ випливає, що $a = b$.	Розв'яжіть систему $\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 = \cos 2y - \cos 2x, \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{y} = 6. \end{cases}$ Знайдемо ОДЗ системи: $x \geq 0; y \geq 0$. Розглянемо функцію $f(t) = 2t^2 - \cos 2t$ при невід'ємних значеннях аргументу. Тоді перше рівняння системи рівносильно умові $f(x) = f(y)$. Доведемо, що функція $f(t)$ є монотонною. Отже, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ при невід'ємних x, y. Маємо систему $\begin{cases} x = y, \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{y} = 6. \end{cases}$ <i>Відповідь.</i>

III. Робота в парах. Доведення нерівностей за порівнянням похідних функцій

Завдання для роботи в парах

Заповніть пропуски у прикладах застосування дослідження функції на монотонність для доведення нерівностей. Обговоріть труднощі, які можуть виникнути при реалізації певного методу розв'язання.

Застосування монотонності функцій для доведення нерівностей	
Метод розв'язання	Приклад
Якщо функція $f(x)$ зростаюча, а функція $g(x)$ спадна, і при цьому $f(x_0) \geq g(x_0)$, то $f(x) \geq g(x)$ при $x \geq x_0$.	Доведіть нерівність $x^9 + 3x + \sin 2x \geq 1 - x^7 - x^5 - (x+1)^3$, якщо $x \geq 1$.
Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ зростають і при цьому $f(x_0) \geq g(x_0)$, а також $f'(x) \geq g'(x)$ при $x \geq x_0$, то $f(x) \geq g(x)$ при $x \geq x_0$.	Доведіть нерівність $x^7 + 3x \geq 2x^4 + 2$, якщо $x \geq 1$.
Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ зростають і при цьому $f(x_0) \leq g(x_0)$, а також $f'(x) \geq g'(x)$ при $x \leq x_0$, то $f(x) \leq g(x)$ при $x \leq x_0$.	Доведіть нерівність $x^9 + 4x \leq 2x^5 + 3$, якщо $x \leq 1$.

IV. Доведення тотожностей за ознакою сталості функції

Теорема. Ознака сталості функції. Нехай на даному проміжку функція диференційовна та $f'(x) = 0$ для будь-якої точки проміжку. Тоді функція на цьому проміжку є сталою.

Часто при застосуванні ознаки сталості функції доцільно скористатися твердженням.

Твердження. Якщо функція є сталою на інтервалі а в одному чи в обох кінцях інтервалу є неперервною, то такий кінець (кінці) можна приєднати до проміжку сталості.

Зокрема:

1) якщо функція є сталою на інтервалі $(a; b)$ і неперервною в точках a та b , то вона є сталою на відрізку $[a; b]$;

2) якщо функція є сталою на інтервалі $(a; +\infty)$ або на інтервалі $(-\infty; b)$, і при цьому є неперервною в точці a (b), то вона є сталою на інтервалі $[a; +\infty)$ або $(-\infty; b]$ відповідно.

Приклад 1. Доведіть тотожність $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ для будь-яких $x \in [-1; 1]$.

Розв'язання. Розглянемо диференційовану на $(-1; 1)$ функцію $y = \arcsin x + \arccos x$

та її похідну: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

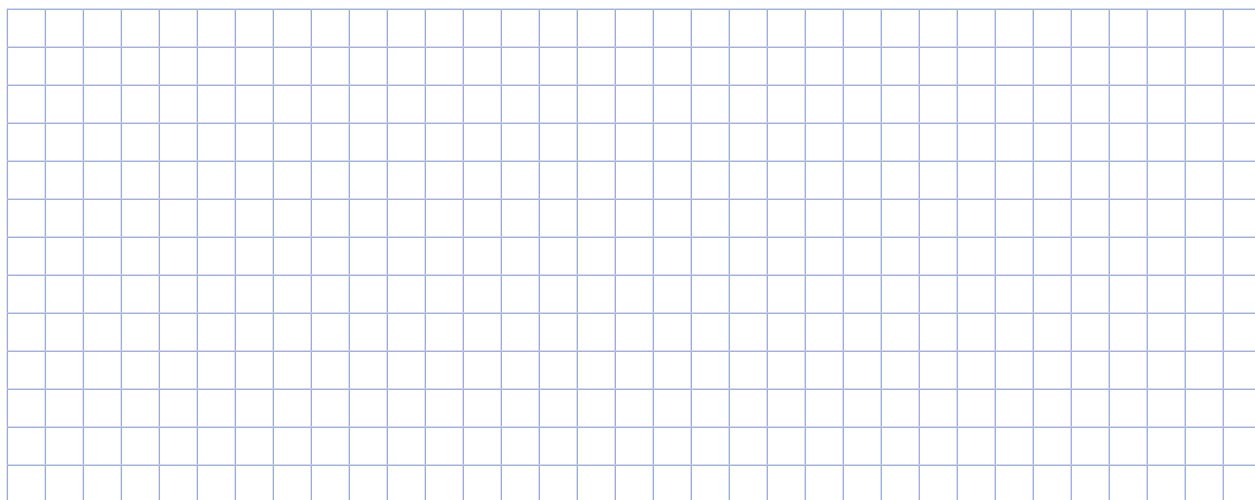
За ознакою сталості функції, $y = \arcsin x + \arccos x = c$, де c — фіксоване число, на інтервалі $(-1; 1)$.

Ураховуючи неперервність функції $y = \arcsin x + \arccos x$ на всьому відрізку $[-1; 1]$, отримуємо, що $y = c$ для будь-яких $x \in [-1; 1]$.

Оскільки $y(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$, то $c = \frac{\pi}{2}$.

Таким чином, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ для будь-яких $x \in [-1; 1]$.

Приклад 2. Доведіть тотожність $2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \begin{cases} -\pi, x \in (-\infty; -1), \\ 0, x \in (-1; 1), \\ \pi, x \in (1; +\infty). \end{cases}$



V. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2013 року?

Задача. При якому найбільшому від'ємному значенні параметра a рівняння

$$\sqrt[4]{|x|-1} - 2x = a \text{ має один корінь?}$$

VI. Додаткові завдання для самостійного розв'язання

1. Розв'яжіть рівняння: $x^5 - 2x^3 + 4x = 3$.
2. Скільки коренів має рівняння $\arctg x = \operatorname{arccotg}\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$? Знайдіть ці корені.
3. Використовуючи методи математичного аналізу, розв'яжіть рівняння: $x^7 + 5x + \sin \pi x = 7 - x^5 - (x-1)^3$.
4. Доведіть нерівність $\arctg x < x$ при $x > 0$.
5. Доведіть, що на проміжку $x \in [1; +\infty)$ виконується нерівність: $4x^5 + 3x \geq 3x^3 + 4$. На якому проміжку буде правильною нерівність $4x^5 + 3x > 3x^3 + 4$?
6. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y, \\ x^3 + y^3 = 54. \end{cases}$$
7. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:
$$\begin{cases} 3x - 3y = \cos y - \cos x, \\ x^3 + 2xy^2 + 3x^2y = 48. \end{cases}$$
8. Доведіть тотожність $\arccos x = 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.
9. Доведіть тотожність $\arccos x - \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \begin{cases} 0, & x \in (0; 1], \\ \pi, & x \in [-1; 0). \end{cases}$
10. Спростіть вираз $\arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x}$.

Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим

- 4) Для мене було найскладнішим
.
.
- 5) Я припустився/припустилася помилки
.
.
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.
.
- 7) Поради собі до наступного уроку
.
.

