

Урок 6. Урок — рактикум. Розв'язування рівнянь, систем рівнянь та доведення нерівностей за ознаками зростання та спадання функцій. Доведення тотожностей

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Розв'язування рівнянь та систем рівнянь за монотонністю функції.
2. Доведення нерівностей за порівнянням похідних функцій.
3. Доведення тотожностей за ознакою сталості функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку — формування умінь та навичок щодо застосування похідної для розв'язування рівнянь та систем рівнянь, доведення нерівностей.
- 2) Додаткова мета уроку — застосування похідної для доведення тотожностей.
- 3) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 4) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.
- 6) Організуйте роботу в малих групах для розв'язування рівнянь та їхніх систем із застосуванням монотонності функцій.

- 7) Організуйте роботу в парах для доведення нерівностей за порівнянням похідних функцій.
- 8) Організуйте розв'язування складних задач методом «мозкового штурму».

I. Організаційна частина (2 хв)

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2013 року?

Задача. При якому найбільшому від'ємному значенні параметра a рівняння

$$\sqrt[4]{|x|} - 1 - 2x = a \text{ має один корінь?}$$

II. Робота в малих групах. Розв'язування рівнянь та систем рівнянь із застосуванням монотонності функції

Завдання для роботи в малих групах

Заповніть пропуски у прикладах застосування дослідження функції на монотонність для розв'язування рівнянь та систем рівнянь. Обговоріть труднощі, які можуть виникнути при реалізації трьох представлених нижче ідей. Проілюструйте ідеї розв'язання даних рівнянь та систем рівнянь за допомогою побудови відповідних графіків, наприклад, у програмі GeoGebra. Перевірте за допомогою графіків аналітичні міркування та/або розв'язки.

Застосування монотонності функцій для розв'язування рівнянь та систем рівнянь	
Метод розв'язання	Приклад
Якщо функція $f(x)$ зростаюча (спадна), і при цьому $f(x_0) = c$, то $x = x_0$ — єдиний розв'язок рівняння $f(x) = c$.	Розв'яжіть рівняння $x + \frac{1}{1+x^2} = 1,5$. Розглянемо функцію $f(t) = t + \frac{1}{t^2+1}$. Доведемо, що функція $f(t)$ є монотонною. Помітимо, що $f(1) = 1,5$. Відповідь.

**Застосування монотонності функцій
для розв'язування рівнянь та систем рівнянь**

Метод розв'язання	Приклад
Якщо функція $f(x)$ зростаюча, а функція $g(x)$ спадає, і при цьому $f(x_0) = g(x_0)$, то $x = x_0$ — єдиний розв'язок рівняння $f(x) = g(x)$.	Розв'яжіть рівняння $x^9 + 3x + \sin 2x = 1 - x^7 - x^5 - (x+1)^3$. Розглянемо функції $f(x) = x^9 + 3x + \sin 2x$ та $g(x) = 1 - x^7 - x^5 - (x+1)^3$ і доведемо, що перша з них зростає, а друга — спадає на множині дійсних чисел. Помітимо, що $f(x_0) = g(x_0)$ при $x_0 =$ <i>Відповідь.</i>
Якщо функція $f(x)$ зростаюча (спадає), то із рівності $f(a) = f(b)$ випливає, що $a = b$.	Розв'яжіть систему $\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 = \cos 2y - \cos 2x, \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{y} = 6. \end{cases}$ Знайдемо ОДЗ системи: $x \geq 0; y \geq 0$. Розглянемо функцію $f(t) = 2t^2 - \cos 2t$ при невід'ємних значеннях аргументу. Тоді перше рівняння системи рівносильно умові $f(x) = f(y)$. Доведемо, що функція $f(t)$ є монотонною. Отже, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ при невід'ємних x, y. Маємо систему $\begin{cases} x = y, \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{y} = 6. \end{cases}$ <i>Відповідь.</i>

III. Робота в парах. Доведення нерівностей за порівнянням похідних функцій

Завдання для роботи в парах

Заповніть пропуски у прикладах застосування дослідження функції на монотонність для доведення нерівностей. Обговоріть труднощі, які можуть виникнути при реалізації певного методу розв'язання.

Застосування монотонності функцій для доведення нерівностей	
Метод розв'язання	Приклад
Якщо функція $f(x)$ зростаюча, а функція $g(x)$ спадна, і при цьому $f(x_0) \geq g(x_0)$, то $f(x) \geq g(x)$ при $x \geq x_0$.	Доведіть нерівність $x^9 + 3x + \sin 2x \geq 1 - x^7 - x^5 - (x+1)^3$, якщо $x \geq 1$.
Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ зростають і при цьому $f(x_0) \geq g(x_0)$, а також $f'(x) \geq g'(x)$ при $x \geq x_0$, то $f(x) \geq g(x)$ при $x \geq x_0$.	Доведіть нерівність $x^7 + 3x \geq 2x^4 + 2$, якщо $x \geq 1$.
Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ зростають і при цьому $f(x_0) \leq g(x_0)$, а також $f'(x) \geq g'(x)$ при $x \leq x_0$, то $f(x) \leq g(x)$ при $x \leq x_0$.	Доведіть нерівність $x^9 + 4x \leq 2x^5 + 3$, якщо $x \leq 1$.

IV. Доведення тотожностей за ознакою сталості функції

Теорема. Ознака сталості функції. Нехай на даному проміжку функція диференційовна та $f'(x) = 0$ для будь-якої точки проміжку. Тоді функція на цьому проміжку є сталою.

Часто при застосуванні ознаки сталості функції доцільно скористатися твердженням.

Твердження. Якщо функція є сталою на інтервалі а в одному чи в обох кінцях інтервалу є неперервною, то такий кінець (кінці) можна приєднати до проміжку сталості.

Зокрема:

1) якщо функція є сталою на інтервалі $(a; b)$ і неперервною в точках a та b , то вона є сталою на відрізку $[a; b]$;

2) якщо функція є сталою на інтервалі $(a; +\infty)$ або на інтервалі $(-\infty; b)$, і при цьому є неперервною в точці a (b), то вона є сталою на інтервалі $[a; +\infty)$ або $(-\infty; b]$ відповідно.

Задачі для розв'язання методом «мозкового штурму»

- 1.** Доведіть тотожність $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ для будь-яких $x \in [-1; 1]$.

Розв'язання. Розглянемо диференційовану на $(-1; 1)$ функцію $y = \arcsin x + \arccos x$

та її похідну: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

За ознакою сталості функції, $y = \arcsin x + \arccos x = c$, де c — фіксоване число, на інтервалі $(-1; 1)$.

Ураховуючи неперервність функції $y = \arcsin x + \arccos x$ на всьому відрізку $[-1; 1]$, отримуємо, що $y = c$ для будь-яких $x \in [-1; 1]$.

Оскільки $y(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$, то $c = \frac{\pi}{2}$.

Таким чином, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ для будь-яких $x \in [-1; 1]$.

- 2.** Доведіть тотожність $2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \begin{cases} -\pi, x \in (-\infty; -1), \\ 0, x \in (-1; 1), \\ \pi, x \in (1; +\infty). \end{cases}$

Розв'язання. Розглянемо диференційовану на $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ функцію

$y = 2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ та її похідну:

$$y' = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

За ознакою сталості функції, $y = 2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ є константою на кожному з проміжків $(-\infty; -1); (-1; 1); (1; +\infty)$, причому у кожному з трьох випадків ці константи можуть бути різними.

$$\text{Оскільки } y(-\sqrt{3}) = 2 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} \frac{2(-\sqrt{3})}{1-(-\sqrt{3})^2} = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\pi,$$

$$y(0) = 2 \operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 0}{1-0^2} = 0 - 0 = 0,$$

$$y(\sqrt{3}) = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi, \text{ то отримуємо остаточно:}$$

$$2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \begin{cases} -\pi, & x \in (-\infty; -1), \\ 0, & x \in (-1; 1), \\ \pi, & x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

V. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2013 року?

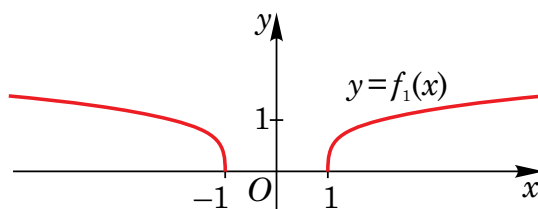
Задача. При якому найбільшому від'ємному значенні параметра a рівняння

$$\sqrt[4]{|x|} - 1 - 2x = a \text{ має один корінь?}$$

Розв'язання. Розглянемо дві функції: $f_1(x) = \sqrt[4]{|x|} - 1$ та $f_2(x) = 2x + a$. За умовою, треба знайти найбільше від'ємне значення параметра a , при якому графіки $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ перетинаються в одній точці.

Помічаємо, що функція $y = f_1(x)$ є парною і її графік є симетричним відносно осі ординат.

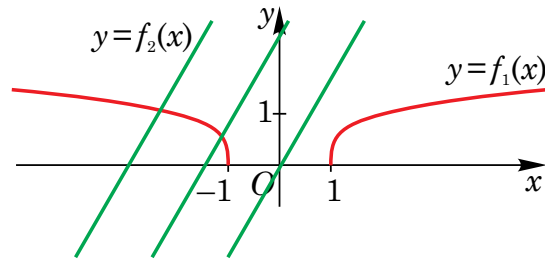
При невід'ємних значеннях аргументу маємо: $f_1(x) = \sqrt[4]{|x|} - 1 = \sqrt[4]{x} - 1$. Тоді графіком $y = f_1(x)$ при невід'ємних значеннях x маємо графік $y = \sqrt[4]{x}$, зміщений на одну одиницю праворуч. З урахуванням парності функції $y = f_1(x)$, отримуємо її графік. Зрозуміло, що областю визначення цієї функції є множина $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.



Розглянемо графік функції $y = f_2(x) = 2x + a$ при різних значеннях параметра a , тобто пряму, яка має кутовий коефіцієнт 2.

При $a = 0$ пряма проходить через початок координат та не перетинає графік функції $y = f_1(x)$, що не відповідає умові.

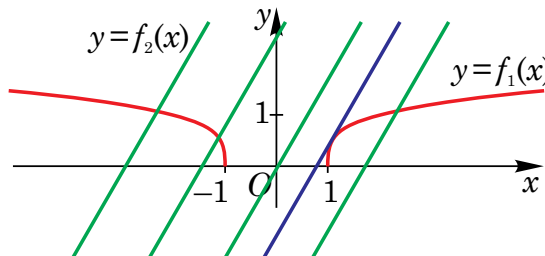
При $a > 0$ вона перетинає додатну частину осі ординат, і при цьому або не перетинає графік функції $y = f_1(x)$, або перетинає його один раз (цей випадок також не відповідає умові про від'ємні значення параметра a).



Розглянемо детально випадок при $a < 0$.

Графіком функції $y = f_2(x) = 2x + a$ буде пряма, яка має кутовий коефіцієнт 2.

1. Вона може не мати із графіком $y = f_1(x)$ спільних точок, що не задовольняє умову.
2. Вона може проходити через точку $(1; 0)$ при $a = -2$, і тоді матиме з графіком $y = f_1(x)$ дві спільні точки, що не задовольняє умову.
3. Вона може перетинати вісь абсцис правіше точки $(1; 0)$ при $a < -2$, і тоді матиме з графіком $y = f_1(x)$ одну спільну точку.
4. Вона може перетинати вісь абсцис лівіше точки $(1; 0)$ і при цьому матиме з графіком $y = f_1(x)$ або дві спільні точки (не задовольняє умову задачі), або одну — у випадку, якщо дотикається до цього графіка. Розглянемо цей випадок докладніше, використовуючи аналітичні міркування.



Нехай пряма $y = f_2(x) = 2x + a$ дотикається до графіка $y = f_1(x)$ в точці $(x_0; f_1(x_0))$ при деякому додатному значенні x_0 . Тоді $f_1'(x_0) = 2$.

При додатних значеннях аргументу: $f_1(x) = \sqrt[4]{|x|-1} = \sqrt[4]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{4}}$, а тоді

$$f_1'(x_0) = \frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x_0-1)^3}} = 2, \text{ тобто } x_0 = 1\frac{1}{16}.$$

З умови, що точка дотику має ординату $f_1(x_0) = \frac{1}{2}$, отримуємо: $2 \cdot 1\frac{1}{16} + a = \frac{1}{2}$, а отже

$$a = -1\frac{5}{8} = -1,625.$$

У ході дослідження випадку від'ємного значення параметра a , ми отримали, що умові про один корінь рівняння відповідають значення $a \in (-\infty; -2) \cup \{-1,625\}$, серед яких найбільшим є число $-1,625$.

Відповідь. $-1,625$.

Висновок. За допомогою ознак зростання та спадання функції можна успішно застосовувати похідну функції для розв'язування рівнянь, систем рівнянь та доведення нерівностей, а також доведення тотожностей.

VI. Додаткові завдання для самостійного розв'язання

1. Розв'яжіть рівняння: $x^5 - 2x^3 + 4x = 3$.
2. Скільки коренів має рівняння $\arctg x = \arctg\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$? Знайдіть ці корені.
3. Використовуючи методи математичного аналізу, розв'яжіть рівняння: $x^7 + 5x + \sin \pi x = 7 - x^5 - (x-1)^3$.
4. Доведіть нерівність $\arctg x < x$ при $x > 0$.
5. Доведіть, що на проміжку $x \in [1; +\infty)$ виконується нерівність: $4x^5 + 3x \geq 3x^3 + 4$. На якому проміжку буде правильною нерівність $4x^5 + 3x > 3x^3 + 4$?
6. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y, \\ x^3 + y^3 = 54. \end{cases}$$
7. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:
$$\begin{cases} 3x - 3y = \cos y - \cos x, \\ x^3 + 2xy^2 + 3x^2y = 48. \end{cases}$$
8. Доведіть тотожність $\arccos x = 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.
9. Доведіть тотожність $\arccos x - \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \begin{cases} 0, & x \in (0; 1], \\ \pi, & x \in [-1; 0). \end{cases}$
10. Спростіть вираз $\arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x}$.

VII. Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим

- 5) Я припустився/припустилася помилки
.
.
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.
.
- 7) Поради собі до наступного уроку
.
.