

Урок 7. Точки екстремуму функції

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

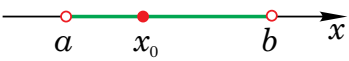
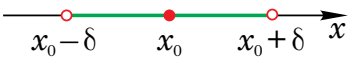
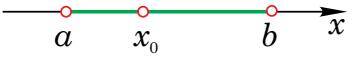
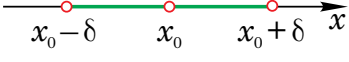
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) узагальните свої знання про околи точки;
- 2) пригадаєте означення точок екстремуму;
- 3) познайомитеся з поняттям критичних точок та стаціонарних точок;
- 4) узагальните свої знання щодо необхідної умови екстремуму;
- 5) навчитесь застосовувати похідну для знаходження точок локального максимуму та мінімуму.

II. Поняття околу точки

При вивченні границь функції в точці ви оперували поняттям δ -околу точки та проколотого δ -околу точки. Узагальнимо ці поняття для подальшого використання зокрема при дослідженні точок екстремуму.

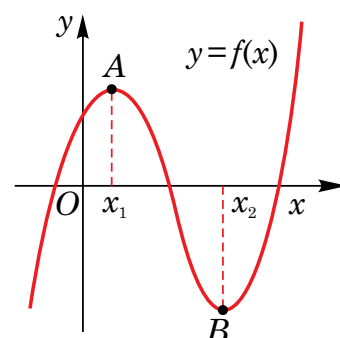
Види околів точки	Графічна ілюстрація	Опис
Окіл точки x_0 .		Будь-який інтервал $(a; b)$, що містить дану точку x_0 .
δ -окіл точки x_0 (частковий випадок околу точки).		Будь-який інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.
Проколотий окіл точки x_0 .		Будь-яке об'єднання інтервалів виду $(a; x_0) \cup (x_0; b)$.
Проколотий δ -окіл точки x_0 (частковий випадок проколотого околу точки).		Будь-який інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, окрім точки x_0 .

III. Означення точки мінімуму. Означення точки максимуму. Графічна ілюстрація точок максимуму та мінімуму

Ви вже вивчали поняття точок локальних екстремумів, а саме: мінімумів і максимумів і, напевно, пам'ятаєте, що їх легко побачити на графіку функції — це абсиси найвищих точок «вершин» та найнижчих точок «западин».

Означення. x_1 — **точка максимуму** функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого інтервалу $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.

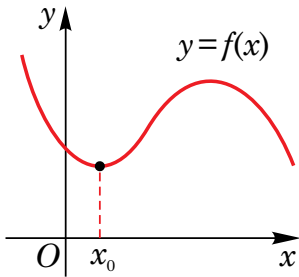
Означення. x_2 — **точка мінімуму** функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого інтервалу $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.

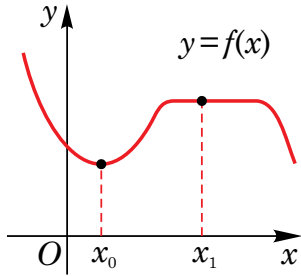
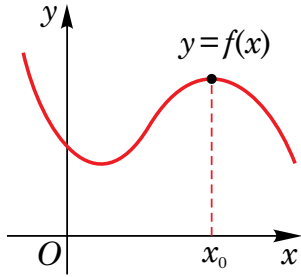
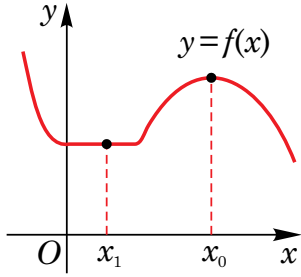


На рисунку x_1 — точка максимуму, а x_2 — точка мінімуму. Обидві ці точки називають точками екстремуму.

Зауваження. Умова $f'(x_0) = 0$ є лише необхідною для точок екстремуму диференційованої функції, але не достатньою. Наприклад, для функції $y = x^3$ похідна при $x_0 = 0$ дорівнює 0, але дана точка не є ані точкою мінімуму, ані точкою максимуму. Натомість дотична в ній збігається з віссю абсцис.

Пригадаємо та уточнимо ці поняття для подальшого використання (див. таблицю).

Вид точки локального екстремуму	Означення та графічна ілюстрація	Примітка
Точка локального мінімуму.	 x_0 — точка мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.	Точка мінімуму: $x_{\min} = x_0$. Мінімум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\min} = f(x_0)$.

Вид точки локального екстремуму	Означення та графічна ілюстрація	Примітка
Точка строгого локального мінімуму.	 x_0 — точка строгого мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого проколотого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) > f(x_0)$.	На рисунку x_0 є точкою строгого мінімуму, а x_1 є однією з точок мінімуму, але не строгого.
Точка локального максимуму.	 x_0 — точка максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.	Точка максимуму: $x_{\max} = x_0$. Максимум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\max} = f(x_0)$.
Точка строгого локального максимуму.	 x_0 — точка строгого максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого проколотого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) < f(x_0)$.	На рисунку x_0 є точкою строгого максимуму, а x_1 є однією з точок максимуму, але не строгого.

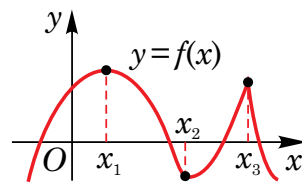
IV. Означення критичних точок

Якщо деяка точка входить до області визначення функції разом із деяким своїм околom, то таку точку називають *внутрішньою точкою* області визначення. Серед та-

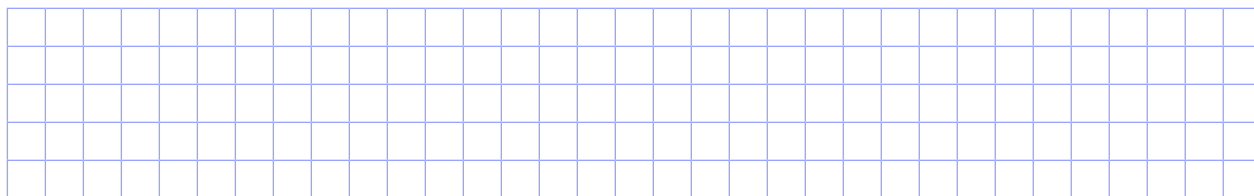
ких точок можуть бути точки локального екстремуму. Для їх пошуку використовують точки із певними властивостями – критичні.

Означення. Внутрішня точка x_0 із області визначення функції $y = f(x)$ є **критичною**, якщо або $f'(x_0) = 0$, або не існує $f'(x_0)$. Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називають **стаціонарними точками**.

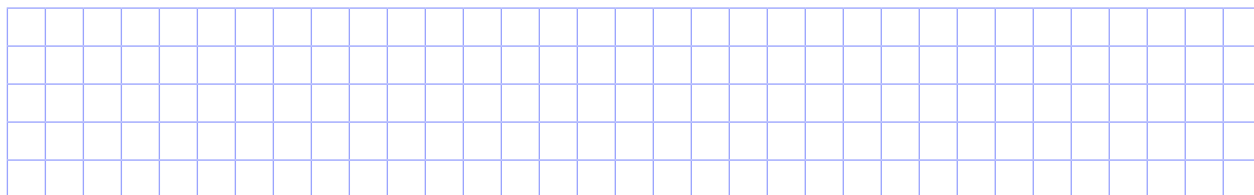
На рисунку точки x_1, x_2, x_3 є критичними для функції $y = f(x)$. При цьому x_1, x_2 — стаціонарні точки (похідна функції дорівнює нулю, дотична до графіка є горизонтальною), а точка x_3 не є такою (не існує скінченної похідної, тому немає похилої дотичної).



Приклад 1. Знайдіть критичні точки функції $y = \frac{3}{4}x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$.



Приклад 2. Знайдіть критичні точки функції $y = x\sqrt{x} - \sqrt{x}$.



V. Необхідна умова існування екстремуму в точці

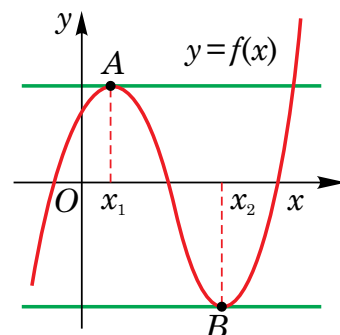
Точка локального екстремуму обов'язково буде внутрішньою точкою області визначення функції, оскільки дана функція має існувати, за означенням, для будь-якого аргументу в деякому δ -околі цієї точки.

Ви вже вивчали теорему Ферма: якщо функція є диференційованою у точці локального екстремуму, то похідна цієї функції в даній точці дорівнює нулю. Якщо додатково врахувати, що функція в даній точці може існувати, але не мати похідну, то отримаємо наступне узагальнення даного факту.

Теорема. Необхідна умова існування екстремуму в точці. Якщо x_0 — точка екстремуму функції, то вона є критичною, тобто або $f'(x_0) = 0$ або не існує $f'(x_0)$.

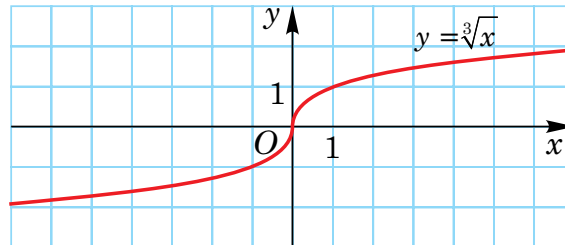
Дана теорема, зокрема, означає, що за наявності похідної у точці екстремуму функції дотична до графіка є або паралельною до осі абсцис, або збігається з нею (див. рисунок).

При цьому умова $f'(x_0) = 0$ є лише необхідною для точок екстремуму функції, але не достатньою. Наприклад, для функції $y = x^3$ похідна при $x_0 = 0$ дорівнює 0, але дана точка не



є ані точкою мінімуму, ані точкою максимуму. Натомість дотична в ній збігається з віссю абсцис.

Аналогічно, умова відсутності скінченної похідної у внутрішній точці області визначення функції є лише необхідною, але не достатньою умовою існування в цій точці локального екстремуму. Так, для функції $y = \sqrt[3]{x}$ скінченної похідної (а отже, і похилої дотичної) в точці $x_0 = 0$ не існує, але ця точка не є точкою локального екстремуму (див. рисунок).



VI. Ознаки точок максимуму та мінімуму функції

Необхідну умова точок екстремуму показує лише «кандидатів» на цю роль – це критичні точки функції. А ось на питання, як серед них обрати саме точки локального максимуму та мінімуму, дає відповідь наступна теорема.

Теорема. Ознаки точок максимуму та мінімуму функції.

- 1) Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 і при цьому $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; x_0)$, а також $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0; b)$. Тоді x_0 є точкою локального максимуму даної функції.
- 2) Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 і при цьому $f'(x) < 0$ на інтервалі $(a; x_0)$, а також $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0; b)$. Тоді x_0 є точкою локального мінімуму даної функції.

Дана теорема означає, що точка, в якій функція є неперервною та змінює знак похідної, є точкою локального екстремуму.

Доведемо, наприклад, ознаку точки максимуму.

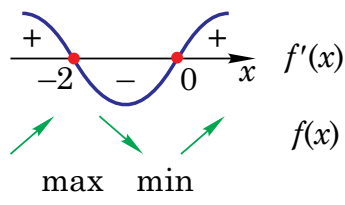
Оскільки $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; x_0)$, то дана функція зростає на цьому інтервалі. З урахуванням неперервності функції в точці x_0 отримуємо, що функція $y = f(x)$ зростає на проміжку $(a; x_0]$, і тому набуває на ньому найбільшого значення саме в точці x_0 .

Аналогічно, з умови $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0; b)$ випливає, що дана функція спадає на цьому інтервалі. З урахуванням неперервності функції в точці x_0 отримуємо, що функція $y = f(x)$ спадає на проміжку $[x_0; b)$, і тому набуває на ньому найбільшого значення саме в точці x_0 .

Таким чином, на інтервалі $(a; b)$ функція $y = f(x)$ набуває найбільшого значення в точці x_0 .

Якщо позначити $\delta = \min(x_0 - a; b - x_0)$, то отримаємо, що для будь-якого значення змінної x з δ -околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$, а отже x_0 є точкою локального максимуму даної функції за означенням.

VII. Схема знаходження точок екстремуму функції.

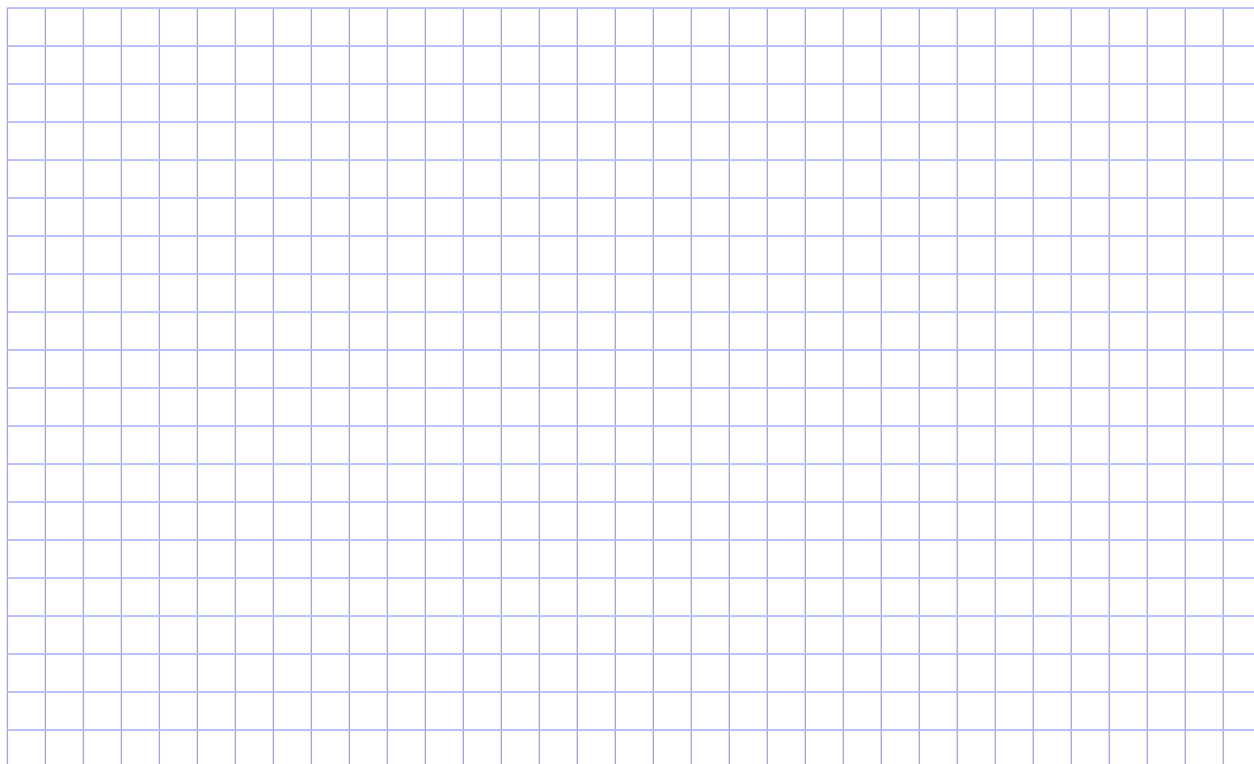
Схема дослідження функції на монотонність та екстремуми	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.
1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.	$D(f) = \mathbb{R}$.
2. Знайдіть похідну даної функції.	$f'(x) = 3x^2 + 6x$.
3. Знайдіть критичні точки даної функції, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ або точки, в яких похідна не існує.	$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0,$ $\begin{cases} x = 0; \\ x = -2. \end{cases}$
4. Нанесіть критичні точки на $D(f)$ і визначте знаки похідної на кожному з утворених інтервалів.	
5. Визначте проміжки монотонності даної функції.	
6. Користуючись ознаками точок максимуму та мінімуму функції, визначте точки локального екстремуму. За необхідності знайдіть значення функції у цих точках (локальні екстремуми).	

$$x_{\max} = -2, \quad x_{\min} = 0,$$

$$y_{\max} = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 1 = 5,$$

$$y_{\min} = 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 1 = 1.$$

Приклад 3. Дослідіть функцію $y(x) = \frac{x^2 + 10x + 20}{x + 2}$ на монотонність та екстремуми.



VII. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2017 року?

Задача. Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(5; -9)$, паралельна осі абсцис. Обчисліть значення виразу $3f'(5) + 10 \cdot f(5)$.

Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
.....
.....
- 2) Мені найбільше запам'яталося
.....
.....
- 3) Для мене було найцікавішим
.....
.....
- 4) Для мене було найскладнішим
.....
.....
- 5) Я припустився/припустилася помилки
.....
.....
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.....
.....
- 7) Поради собі до наступного уроку
.....
.....



