

Урок 7. Точки екстремуму функції

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Поняття околу точки.
2. Означення точки мінімуму. Означення точки максимуму. Графічна ілюстрація точок максимуму та мінімуму.
3. Означення критичних точок функції.
4. Необхідна умова існування екстремуму в точці.
5. Ознаки точок максимуму та мінімуму функції.
6. Схема знаходження точок екстремуму функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П].

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Сформулюйте задачу ЗНО/НМТ. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи.
- 3) На цьому уроці учні/учениці продовжують знайомитися з поняттям локального екстремуму функції та його властивостями.
- 4) Наводьте ілюстративні приклади у межах часових можливостей уроку. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 5) На одному з етапів уроку учні/учениці отримають конкретний практичний спосіб дослідження функції на екстремуми. Тому саме відповідній схемі та особливостям її застосування.

ня доцільно приділити найбільшу увагу, а попередні етапи «пройти» з учнями/ученицями у більш швидкому темпі.

6) Наприкінці уроку пропонуйте учням/ученицям розв'язати практичну задачу, сформульовану на початку уроку. Об'єднайте учнівство у кілька груп.

7) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язати завдання, запропоновані на різних етапах уроку.

8) Теорію подавайте глибоко за змістом, але стисло за формою.

9) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

11) Основним елементом уроку є ознайомлення учнів з класичними результатами щодо локальних екстремумів диференційованих функцій.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Що таке окіл точки? Проколотий окіл точки?

2) Які точки називають точками мінімуму? Точками максимуму?

3) Які точки називають критичними для даної функції?

4) Назвіть необхідну умову існування локального екстремуму у даній точці.

5) Назвіть достатні умови для точок максимуму та мінімуму.

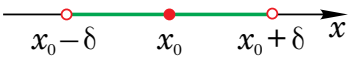
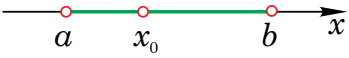
6) Опишіть порядок дій при знаходженні точок локального екстремуму.

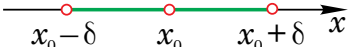
Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2017 року?

Задача. Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(5; -9)$, паралельна осі абсцис. Обчисліть значення виразу $3f'(5) + 10 \cdot f(5)$.

II. Поняття околу точки

При вивченні границь функції в точці ви оперували поняттям δ -околу точки та проколатого δ -околу точки. Узагальнимо ці поняття для подальшого використання зокрема при дослідженні точок екстремуму.

Види околів точки	Графічна ілюстрація	Опис
Окіл точки x_0 .		Будь-який інтервал $(a; b)$, що містить дану точку x_0 .
δ -окіл точки x_0 (частковий випадок околу точки).		Будь-який інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.
Проколатий окіл точки x_0 .		Будь-яке об'єднання інтервалів виду $(a; x_0) \cup (x_0; b)$.

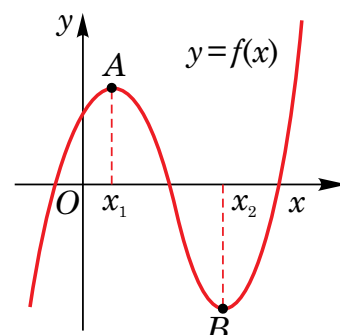
Види околів точки	Графічна ілюстрація	Опис
Проколотий δ -окіл точки x_0 (частковий випадок проколотої околу точки).		Будь-який інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, окрім точки x_0 .

III. Означення точки мінімуму. Означення точки максимуму. Графічна ілюстрація точок максимуму та мінімуму

Ви вже вивчали поняття точок локальних екстремумів, а саме: мінімумів і максимумів і, напевно, пам'ятаєте, що їх легко побачити на графіку функції — це абсиси найвищих точок «вершин» та найнижчих точок «западин».

Означення. x_1 — **точка максимуму** функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого інтервалу $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.

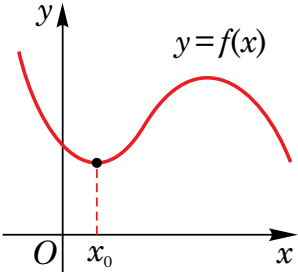
Означення. x_2 — **точка мінімуму** функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого інтервалу $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.

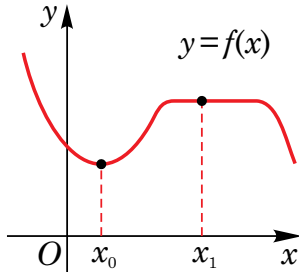
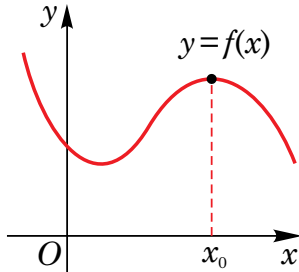
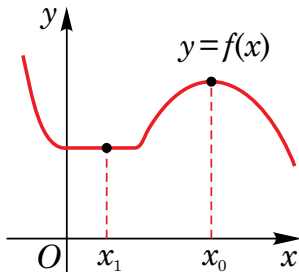


На рисунку x_1 — точка максимуму, а x_2 — точка мінімуму. Обидві ці точки називають точками екстремуму.

Зауваження. Умова $f'(x_0) = 0$ є лише необхідною для точок екстремуму диференційованої функції, але не достатньою. Наприклад, для функції $y = x^3$ похідна при $x_0 = 0$ дорівнює 0, але дана точка не є ані точкою мінімуму, ані точкою максимуму. Натомість дотична в ній збігається з віссю абсцис.

Пригадаємо та уточнимо ці поняття для подальшого використання (див. таблицю).

Вид точки локального екстремуму	Означення та графічна ілюстрація	Примітка
Точка локального мінімуму.	 x_0 — точка мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.	Точка мінімуму: $x_{\min} = x_0$. Мінімум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\min} = f(x_0)$.

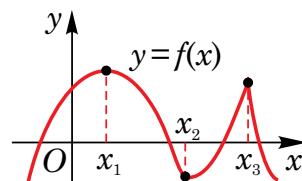
Вид точки локального екстремуму	Означення та графічна ілюстрація	Примітка
Точка строгого локального мінімуму.	 x_0 — точка строгого мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого проколотого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) > f(x_0)$.	На рисунку x_0 є точкою строгого мінімуму, а x_1 є однією з точок мінімуму, але не строгого.
Точка локального максимуму.	 x_0 — точка максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.	Точка максимуму: $x_{\max} = x_0$. Максимум (частковий випадок локального екстремуму): $y_{\max} = f(x_0)$.
Точка строгого локального максимуму.	 x_0 — точка строгого максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-якого значення змінної x з деякого проколотого δ-околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) < f(x_0)$.	На рисунку x_0 є точкою строгого максимуму, а x_1 є однією з точок максимуму, але не строгого.

IV. Означення критичних точок

Якщо деяка точка входить до області визначення функції разом із деяким своїм околom, то таку точку називають *внутрішньою точкою* області визначення. Серед таких точок можуть бути точки локального екстремуму. Для їх пошуку використовують точки із певними властивостями – критичні.

Означення. Внутрішня точка x_0 із області визначення функції $y = f(x)$ є **критичною**, якщо або $f'(x_0) = 0$, або не існує $f'(x_0)$. Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називають **стаціонарними точками**.

На рисунку точки x_1, x_2, x_3 є критичними для функції $y = f(x)$. При цьому x_1, x_2 — стаціонарні точки (похідна функції дорівнює нулю, дотична до графіка є горизонтальною), а точка x_3 не є такою (не існує скінченної похідної, тому немає похилої дотичної).



Ілюстративні приклади

- 1.** Знайдіть критичні точки функції $y = \frac{3}{4}x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$.

Розв'язання. Функція визначена та є диференційовною на множині $D(y) = \mathbb{R}$.

Знайдемо похідну: $y'(x) = 3x^3 - 12x^2 - 36x$.

Критичні точки: $y'(x) = 3x^3 - 12x^2 - 36x = 0$,

$$y'(x) = 3x^3 - 12x^2 - 36x = 0 \Leftrightarrow 3x(x^2 - 4x - 12) = 0,$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = -2, \\ x = 6. \end{cases}$$

Відповідь. $-2, 0, 6$.

- 2.** Знайдіть критичні точки функції $y = x\sqrt{x} - \sqrt{x}$.

Розв'язання. Функція визначена на $D(y) = [0; +\infty)$ та є диференційовною на множині $(0; +\infty)$.

Знайдемо похідну: $y(x) = x\sqrt{x} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$,

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x - 1) + \sqrt{x} = \frac{x - 1 + 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Критичні точки: } y'(x) = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}} = 0, \quad 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Крім того, у точці 0 функція існує, а її похідна — ні. Але ця точка не є внутрішньою для області визначення $D(y) = [0; +\infty)$, а тому не є критичною.

Відповідь. $x = \frac{1}{3}$.

V. Необхідна умова існування екстремуму в точці

Точка локального екстремуму обов'язково буде внутрішньою точкою області визначення функції, оскільки дана функція має існувати, за означенням, для будь-якого аргументу в деякому δ -околі цієї точки.

Ви вже вивчали теорему Ферма: якщо функція є диференційованою у точці локального екстремуму, то похідна цієї функції в даній точці дорівнює нулю. Якщо додатково

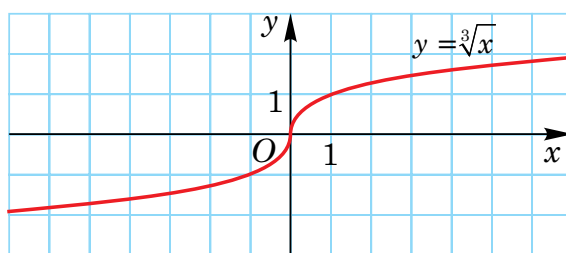
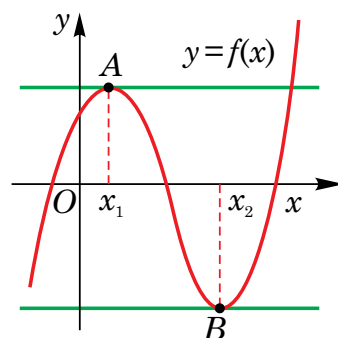
врахувати, що функція в даній точці може існувати, але не мати похідну, то отримаємо наступне узагальнення даного факту.

Теорема. Необхідна умова існування екстремуму в точці. Якщо x_0 — точка екстремуму функції, то вона є критичною, тобто або $f'(x_0) = 0$ або не існує $f'(x_0)$.

Дана теорема, зокрема, означає, що за наявності похідної у точці екстремуму функції дотична до графіка є або паралельною до осі абсцис, або збігається з нею (див. рисунок).

При цьому умова $f'(x_0) = 0$ є лише необхідною для точок екстремуму функції, але не достатньою. Наприклад, для функції $y = x^3$ похідна при $x_0 = 0$ дорівнює 0, але дана точка не є ані точкою мінімуму, ані точкою максимуму. Натомість дотична в ній збігається з віссю абсцис.

Аналогічно, умова відсутності скінченної похідної у внутрішній точці області визначення функції є лише необхідною, але не достатньою умовою існування в цій точці локального екстремуму. Так, для функції $y = \sqrt[3]{x}$ скінченної похідної (а отже, і похилої дотичної) в точці $x_0 = 0$ не існує, але ця точка не є точкою локального екстремуму (див. рисунок).



VI. Ознаки точок максимуму та мінімуму функції

Необхідну умова точок екстремуму показує лише «кандидатів» на цю роль — це критичні точки функції. А ось на питання, як серед них обрати саме точки локального максимуму та мінімуму, дає відповідь наступна теорема.

Теорема. Ознаки точок максимуму та мінімуму функції.

1) Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 і при цьому $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; x_0)$, а також $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0; b)$. Тоді x_0 є точкою локального максимуму даної функції.

2) Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 і при цьому $f'(x) < 0$ на інтервалі $(a; x_0)$, а також $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0; b)$. Тоді x_0 є точкою локального мінімуму даної функції.

Дана теорема означає, що точка, в якій функція є неперервною та змінює знак похідної, є точкою локального екстремуму.

Доведемо, наприклад, ознаку точки максимуму.

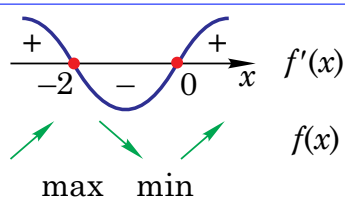
Оскільки $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; x_0)$, то дана функція зростає на цьому інтервалі. З урахуванням неперервності функції в точці x_0 отримуємо, що функція $y = f(x)$ зростає на проміжку $(a; x_0]$, і тому набуває на ньому найбільшого значення саме в точці x_0 .

Аналогічно, з умови $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0; b)$ випливає, що дана функція спадає на цьому інтервалі. З урахуванням неперервності функції в точці x_0 отримуємо, що функція $y = f(x)$ спадає на проміжку $[x_0; b)$, і тому набуває на ньому найбільшого значення саме в точці x_0 .

Таким чином, на інтервалі $(a; b)$ функція $y = f(x)$ набуває найбільшого значення в точці x_0 .

Якщо позначити $\delta = \min(x_0 - a; b - x_0)$, то отримаємо, що для будь-якого значення змінної x з δ -околу точки x_0 справджується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$, а отже x_0 є точкою локального максимуму даної функції за означенням.

VII. Схема знаходження точок екстремуму функції.

Схема дослідження функції на монотонність та екстремуми	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.
1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.	$D(f) = \mathbb{R}$.
2. Знайдіть похідну даної функції.	$f'(x) = 3x^2 + 6x$.
3. Знайдіть критичні точки даної функції, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ або точки, в яких похідна не існує.	$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0,$ $\begin{cases} x = 0; \\ x = -2. \end{cases}$
4. Нанесіть критичні точки на $D(f)$ і визначте знаки похідної на кожному з утворених інтервалів.	
5. Визначте проміжки монотонності даної функції.	
6. Користуючись ознаками точок максимуму та мінімуму функції, визначте точки локального екстремуму. За необхідності знайдіть значення функції у цих точках (локальні екстремуми).	
	$x_{\max} = -2, \quad x_{\min} = 0,$ $y_{\max} = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 1 = 5,$ $y_{\min} = 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 1 = 1.$

Ілюстративні приклади

3. Дослідіть функцію $y(x) = \frac{x^2 + 10x + 20}{x + 2}$ на монотонність та екстремуми.

Розв'язання. Функція невизначена, якщо $x = -2$. Розглянемо дану функцію на $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Знайдемо похідну: $y'(x) = \frac{(2x+10)(x+2) - (x^2+10x+20)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$.

Критичні точки: $y'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = 0$, $x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(x+4)=0$,

$$\begin{cases} x=0, \\ x=-4. \end{cases}$$

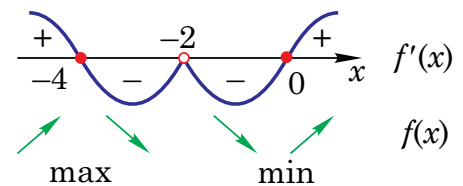
Визначимо методом інтервалів знаки похідної на $D(y)$ та дослідимо функцію на монотонність та екстремуми: $y'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$.

Отже, дана функція зростає на проміжках $(-\infty; -4]$; $[0; +\infty)$ і спадає на проміжках $[-4; -2]$; $(-2; 0]$.

Точки екстремуму: $x_{\max} = -4$, $x_{\min} = 0$.

Екстремуми: $y_{\max} = \frac{16-40+20}{-4+2} = 2$, $y_{\min} = \frac{0+0+20}{0+2} = 10$.

Відповідь. Функція зростає на проміжках $(-\infty; -4]$; $[0; +\infty)$, спадає на проміжках $[-4; -2]$; $(-2; 0]$; $x_{\max} = -4$, $y_{\max} = 2$; $x_{\min} = 0$, $y_{\min} = 10$.



4. Дано функцію $y(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2} + 3$. Знайдіть точки її локального екстремуму та найменше значення функції.

Розв'язання. Функція визначена на $D(y) = \mathbb{R}$, але не є диференційовною у точці $x = 3$.

Знайдемо похідну: $y'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$.

Критичні точки: $y'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} = 0$, $y'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Якщо $x = 3$, то функція визначена, а похідна — ні, тому $x = 3$ є критичною точкою. Визначимо методом інтервалів знаки похідної на $D(y)$ та дослідимо функцію на монотонність та екстремуми.

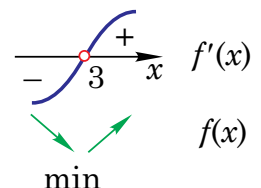
Отже, з урахуванням неперервності даної функції в точці $x = 3$, функція $y(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2} + 3$ спадає на проміжку $(-\infty; 3]$ та зростає на проміжку $[3; +\infty)$.

Точка екстремуму: $x_{\min} = 3$.

Екстремум: $y_{\min} = y(3) = \sqrt[3]{(3-3)^2} + 3 = 3$.

Оскільки функція спадає на проміжку $(-\infty; 3]$ та зростає на проміжку $[3; +\infty)$, то в точці $x = 3$ вона набуває найменшого свого значення.

Відповідь. $x_{\min} = 3$, $\min y(x) = y(3) = 3$.



5. Знайдіть локальні екстремуми функції $y = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Функція є періодичною з періодом $T = \pi$ і є невизначеною в точках виду $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Розглянемо дану функцію на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Знайдемо похідну: $y' = 3 \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 3 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\cos^2 x}$.

Критичні точки: $y' = 3 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\cos^2 x} = 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\operatorname{tg}^2 x = 1, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), x = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Визначимо методом інтервалів знаки похідної та дослідимо функцію на монотонність та екстремуми:

$$y' = 3 \cdot \frac{(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 1)}{\cos^2 x}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

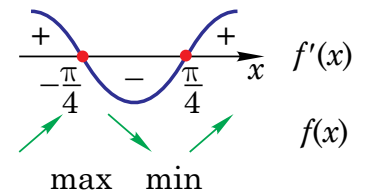
Отже, на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$: $x_{\max} = -\frac{\pi}{4}, y_{\max} = -1 + 3 = 2$;

$$x_{\min} = \frac{\pi}{4}, y_{\min} = 1 - 3 = -2.$$

З урахуванням періодичності, отримуємо:

$$x_{\max} = -\frac{\pi}{4} + \pi k, y_{\max} = 2; x_{\min} = \frac{\pi}{4} + \pi k, y_{\min} = -2.$$

Відповідь. $y_{\max} = 2; y_{\min} = -2$.



VII. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2017 року?

Задача. Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(5; -9)$, паралельна осі абсцис. Обчисліть значення виразу $3f'(5) + 10 \cdot f(5)$.

Розв'язання. Оскільки дотична до графіка функції при $x = 5$ паралельна осі абсцис, то $f'(5) = 0$.

Також графік проходить через точку $M(5; -9)$, тому $f(5) = -9$.

Тоді $3f'(5) + 10 \cdot f(5) = 3 \cdot 0 + 10 \cdot (-9) = -90$.

Відповідь. -90 .

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
-
-
- 2) Мені найбільше запам'яталося
-
-

- 3) Для мене було найцікавішим
.
.
- 4) Для мене було найскладнішим
.
.
- 5) Я припустився/припустилася помилки
.
.
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.
.
- 7) Поради собі до наступного уроку
.
.