

Урок 9. Урок–практикум. Розв’язування задач. Ознаки монотонності та точки екстремуму функцій

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Знаходження точок екстремуму та проміжків спадання й зростання функцій. Робота в парах.
3. Дослідження функцій з параметрами на наявність точок екстремуму. Робота в малих групах.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв’язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням письмову перевірку відповідей до деяких завдань домашнього завдання. За необхідності зробіть аналіз якихось із запропонованих завдань.
- 2) Обговоріть найважливіші задачі домашнього завдання. При необхідності використовуйте опитування біля дошки або інші форми роботи.
- 3) Учні/учениці об’єднуються в пари і працюють над завданнями для роботи в групах.
- 4) Об’єднуємо учнівство у кілька груп. Упродовж розв’язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички. Розв’язуємо завдання для групової роботи.
- 5) Наприкінці уроку пропонуйте учням/ученицям розв’язати практичну задачу, сформульовану на початку уроку. Об’єднайте клас у кілька груп (4 – 6 груп).
- 6) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв’язати завдання, запропоновані на різних етапах уроку.

- 7) Основна мета уроку — закріплення умінь та навичок щодо дослідження функцій на монотонність та екстремуми за допомогою похідної.
- 8) Додаткова мета уроку — застосування похідної для дослідження функцій з параметрами.
- 9) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість та зміст матеріалу на ваш розсуд.
- 10) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2016 року?

Задача. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 4t^2 + 9t + 8$, де s — шлях (у метрах), t — час (у секундах). Визначте швидкість (у м/с) цієї точки в момент часу $t = 4$ с.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Знайдіть критичні точки функції $y = \sin \frac{x}{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$.

Відповідь. $\pm \frac{3\pi}{2} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2. Знайдіть екстремуми функції $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}$.

Відповідь. $x_{\max} = 0, y_{\max} = 0; x_{\min} = -\sqrt[3]{2}, y_{\min} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

3. Дослідіть функцію $y = (x-1)^4 (x+2)^3$ на монотонність та екстремуми.

Відповідь. $f \uparrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{7}\right]; [1; +\infty), f \downarrow x \in \left[-\frac{5}{7}; 1\right], x_{\max} = -\frac{5}{7}, y_{\max} = \frac{12^4 \cdot 9^3}{7^7} \approx 18,36,$
 $x_{\min} = 1, y_{\min} = 0$.

Завдання для обговорення

1. Дослідіть функцію $y = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$ на монотонність та екстремуми.

Вказівка. Доцільно спочатку розглянути функцію $y = |x|\sqrt{2x+9}$ та її похідну окремо при додатних і окремо при від'ємних значеннях аргументу, врахувавши при цьому область визначення функції.

Відповідь. $x_{\min} = 0, y_{\min} = 0; x_{\max} = -3, y_{\max} = 3\sqrt{3}$; функція зростає на проміжках $[-4, 5; -3]; [0; +\infty]$ та спадає на проміжку $[-3; 0]$.

2. Знайдіть точки локального екстремуму та локальні екстремуми функції $y = \sin x - \cos x + x$.

Вказівка. Похідну функції доцільно звести до вигляду $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ та дослідити її знак на періоді $x \in [-\pi; \pi]$.

Відповідь. $x_{\max} = \pi + 2\pi k, y_{\max} = \pi + 1 + 2\pi k$; $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, y_{\min} = -\frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k$.

3. Дослідіть функцію $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$ на локальні екстремуми.

Вказівка. Критичні точки: $-0, 1, -1$.

Відповідь. $x_{\min} = \pm 1, y_{\min} = \sqrt[3]{4}$; $x_{\max} = 0, y_{\max} = 2$.

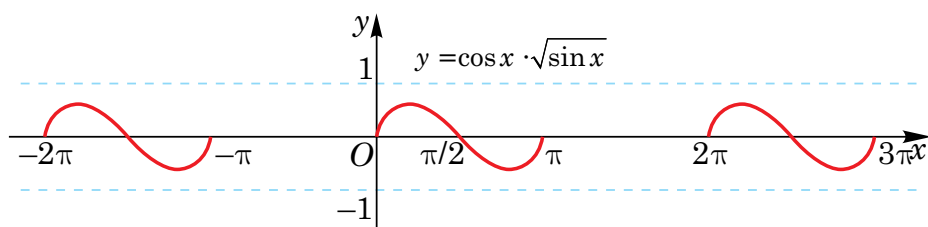
III. Знаходження точок екстремуму та проміжків спадання й зростання функцій. Робота в парах

Заповніть схему дослідження функції на монотонність та екстремуми. Впишіть необхідні слова та формули в етапах дослідження. Заповніть відповідні частини для даного прикладу функції.

<i>Схема дослідження функції на монотонність та екстремуми</i>	
Етапи дослідження	Функція $f(x) = \left(\frac{x-5}{x}\right)^2$.
1. Знайдіть ...	$D(f) = \dots$
2. Знайдіть ...	$f'(x) = \dots$
3. Знайдіть ...	$f'(x) = 0$
4. Нанесіть критичні точки на $D(f)$ і визначте ...	
5. Визначте проміжки монотонності даної функції.	
6. Користуючись ознаками точок максимуму та мінімуму функції, визначте точки ...	

Завдання для роботи в парах

4. Знайдіть проміжки зростання й спадання функції $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}$ та точки її максимуму й мінімуму.
5. Дослідіть функцію на локальні екстремуми: $f(x) = \cos x \cdot \sqrt{\sin x}$. Перевірте результати дослідження з побудованим графіком даної функції (див. рисунок).



6. Знайдіть проміжки монотонності, точки локального екстремуму та локальні екстремуми функції: $f(x) = x|x-1| - 5x^3$. Побудуйте схематично графік даної функції.

IV. Дослідження функцій з параметрами на наявність точок екстремуму. Робота в малих групах

Завдання для роботи в малих групах

7. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = 2ax^3 - 3(a+1)x^2 + (12a-6)x + 7$ має тільки одну критичну точку? Дослідіть, чи буде ця точка точкою локального екстремуму.
8. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = 2x^3 - (9a+3)x^2 + 12a(a+1)x - 5$ має додатну точку мінімуму?
9. Знайдіть, при яких значеннях параметра a функція $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a^2-1)x - 1$ має локальний максимум в точці $x_0 = 0$. З'ясуйте, чи досягається в цій точці найбільше значення даної функції на множині дійсних чисел.

V. Самостійна робота

1. Знайдіть критичні точки функції $f(x) = 3x^4 - x^3 + 6$.

А	Б	В	Г	Д
-1; 1	0; 0,25	-1; 0,25	0; -0,25	інша відповідь



- 2.** Скільки точок екстремуму має функція $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 3$?

А	Б	В	Г	Д
одну	дві	три	більше трьох	інша відповідь

[illegible]

- 3.** Знайдіть проміжки монотонності та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2 + 7x}{x - 9}$.

[illegible]

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему із ЗНО 2016 року?

Задача. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 4t^2 + 9t + 8$, де s — шлях (у метрах), t — час (у секундах). Визначте швидкість (у м/с) цієї точки в момент часу $t = 4$ с.

Розв'язання. У відповідності до механічного змісту похідної, $v(t) = s'(t)$, тому:

$$v(t) = (4t^2 + 9t + 8)' = 8t + 9, \quad v(4) = 8 \cdot 4 + 9 = 41 \text{ (M/c)}.$$

Відповідь. 41 м/с.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я знаю ознаки зростання/спадання функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію застосовувати ознаки зростання/спадання функції для дослідження монотонності функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю означення критичних точок функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю означення точок локального екстремуму. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

5. Я вмію застосовувати похідну для знаходження функції на монотонність та екстремуми.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я вмію застосовувати похідну для дослідження функцій з параметрами.

Так

Ще треба потренуватися

Ні