

Урок 1. Степінь з дійсним показником

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте поняття степеня з натуральним, цілим та раціональним показниками;
- 2) з'ясуєте, що називають степенем з дійсним показником, та за яких умов він має зміст;
- 3) з'ясуєте область допустимих значень основи степеня;
- 4) ознайомитеся з основними властивостями степенів з дійсними показниками;
- 5) навчитеся застосовувати властивості степенів під час перетворення алгебричних виразів;
- 6) переконаєтеся в практичній доцільності використання степенів з дійсними показниками для розв'язування математичних і прикладних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $x^4 = \frac{1}{16}$.
2. Спростіть вираз $a^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{3}}$.
3. Скоротіть дріб $\frac{m^{\frac{1}{2}} - 9}{m^{\frac{1}{4}} + 3}$.
4. Знайдіть значення n , якщо $\sqrt{\frac{1}{6}} \sqrt{6} \sqrt{\frac{1}{6}} = 6^n$.

III. Поняття степеня з дійсним показником

Нам уже відоме поняття степеня з натуральним, цілим та раціональним показниками. Спробуємо пояснити, що таке степінь з ірраціональним показником.

Розглянемо окремий випадок, з'ясуємо що розуміють під степенем числа 2 з показником π .

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу $\pi = 3,1415\dots$

Розглянемо послідовність раціональності чисел: $3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; \dots$

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π .

Відповідно до заданої послідовності побудуємо послідовність степенів з раціональними показниками: $2^3, 2^{3,1}, 2^{3,14}, 2^{3,141}, 2^{3,1415}, \dots$

Можна показати, що члени цієї послідовності зі збільшенням номера прямують до деякого додатного числа. Це число називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^π .

Розглянемо загальний випадок.

1) Розглянемо вираз b^α , де $b > 0$, а α – ірраціональне число.

2) Побудуємо для числа α послідовність раціональних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, таку що $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$.

3) Далі розглянемо послідовність $b^{\alpha_1}, b^{\alpha_2}, \dots, b^{\alpha_n}$ степенів з раціональними показниками.

4) Можна довести (спробуйте зробити це в рамках дослідницького проекту), що утворена послідовність збіжна, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{\alpha_n} = c$, причому число c не залежить від вибору збіжної до числа α послідовності раціональних чисел.

5) Число c називають степенем числа b з ірраціональним показником α .

Відмітимо, що:

1) $1^\alpha = 1$ для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$;

2) $0^\alpha = 0$ лише для $\alpha > 0$, тобто $0^\pi = 0$, $0^{\sqrt{3}} = 0$, але вираз $0^{-\sqrt{2}}$ не має змісту.

IV. Властивості степенів із дійсними показниками

Степінь з дійсним показником має властивості аналогічні степеню з раціональним показником. Для $a > 0$ і $b > 0$ і для будь-яких дійсних чисел m і n :

1) $a^n a^m = a^{n+m}$;

2) $a^n : a^m = a^{n-m}$;

3) $(a^n)^m = a^{nm}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Доведення. Нехай m і n — дійсні числа, при чому $m = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k$, $n = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k$, де (m_k) і (n_k) — послідовності раціональних чисел. Маємо

$$m + n = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k + \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (m_k + n_k).$$

Для додатного числа x розглянемо три послідовності: (x^{m_k}) , (x^{n_k}) , $(x^{m_k} \cdot x^{n_k})$. Маємо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{m_k} = x^m, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k} = x^n.$$

Оскільки для раціональних m_k і n_k властивість 1 має місце, то $x^{m_k} \cdot x^{n_k} = x^{m_k + n_k}$.

Послідовність раціональних чисел $m_1 + n_1$, $m_2 + n_2$, $m_3 + n_3$, ... збігається до числа $m + n$. Тому можна записати, що $\lim_{k \rightarrow \infty} (m_k \cdot n_k) = x^{m+n}$.

$$x^m \cdot x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{m_k} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x^{m_k} \cdot x^{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{m_k + n_k} = x^{m+n}.$$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Ентомолог, вивчаючи нашествя саранчі дослідив, що площа (у м²), заражена саранчею, змінюється за формулою $S_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$, де n — кількість тижнів після зараження. Знайдіть:

- 1) початкову площу зараження;
- 2) площу зараження через 8 тижнів;
- 3) площу зараження через 12 тижнів.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

- 1) $32^{0,4}$;
- 2) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4}$;
- 3) $(9^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$;
- 4) $49^{0,25} \cdot \sqrt{7}$.

2. Чи має зміст вираз:

- 1) $(-3)^{\sqrt{3}}$;
- 2) $0^{\sqrt{7}}$;
- 3) $2^{-2\sqrt{2}}$;
- 4) $0^{-\sqrt{5}}$.

3. Знайдіть значення виразу:

- 1) $2^{5,3} \cdot 2^{-0,3}$;
- 2) $3^{6,8} \cdot 3^{-5,8}$;
- 3) $8^{-\frac{1}{2}} 8^{3,5}$;
- 4) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3,7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-0,7}$.

4. Доведіть, що:

- 1) $\frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{2}}$;
- 2) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} = (16^{\sqrt{3}})^{-2}$.

5. Яке число більше за 1, а яке менше від 1:

- 1) $1,8^{\sqrt{1,8}}$;
- 2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$;
- 3) $7^{-\sqrt{2}}$;
- 4) $0,3^{-\pi}$;

6. Спростіть вираз:

- 1) $(a - x^{0,5})(a + x^{0,5})$;
- 2) $\left(c^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{4}}\right)\left(c^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}\right)$;
- 3) $(a - b) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$;
- 4) $(1 - x) : \left(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)$.

7. Спростіть вираз:

1) $(a^{\sqrt{5}} + 2)(a^{\sqrt{5}} - 2) - (a^{\sqrt{5}} + 3)^2$;

2) $\frac{a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{3\sqrt{7}}}$.

8. Порівняйте числа:

1) $x^{-\sqrt{3}}$ 1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{6}{13}}$ і $\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{6}{13}}$;

2) $0,021^{-\frac{1}{3}}$ і $0,022^{-\frac{1}{3}}$;

3) $(2\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ і $(3\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$;

4) $(\sqrt{21})^{-\frac{4}{9}}$ і $(2\sqrt{5})^{-\frac{4}{9}}$.

Рівень В

1. Знайдіть область допустимих значень виразу:

1) $x^{\sqrt{7}}$;

2) $x^{\sqrt{7}}$;

3) $(2-x)^{-2\sqrt{2}}$;

4) $(x^2-1)^{\sqrt{5}}$.

2. Знайдіть значення виразу:

1) $(\sqrt{5})^{3,6} \cdot (\sqrt{5})^{-1,6}$;

2) $(\sqrt{7})^{-0,2} \cdot (\sqrt{7})^{-3,8}$;

3) $(\sqrt[3]{2})^{4,7} \cdot (\sqrt[3]{2})^{-1,7}$;

4) $(\sqrt[5]{3})^{\frac{1}{3}} \cdot (\sqrt[5]{3})^{\frac{31}{3}}$.

3. Порівняйте з числом 1 степінь:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;

2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$;

3) $0,6^{2\sqrt{5}}$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$.

4. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}{(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})^2} + 1$;

2) $\frac{a^{\sqrt[3]{24}} - 1}{a^{\sqrt[3]{3}} - 1} - \frac{a^{\sqrt[3]{81}} + 1}{a^{\sqrt[3]{3}} + 1}$.

5. Знайдіть значення виразу:

1) $16^{0,25+\sqrt{20}} : 16^{2\sqrt{5}}$;

2) $7^{\sqrt{12}} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\sqrt{3}} + 216^{\frac{1}{3}}$.

6. Порівняйте числа:

1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{4}}$ і 1;

2) $3^{-\sqrt{12}}$ і $\left(\frac{1}{3}\right)^3$;

3) $7,2^{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$ і 1;

4) $0,25^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ і $0,25^{\frac{1}{3}}$.

7. Порівняйте числа a і b , якщо:

1) $0,12^a > 0,12^b$;

2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^a < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^b$;

3) $(\sqrt{7})^a < (\sqrt{7})^b$;

4) $(\sqrt{2}-1)^a > (\sqrt{2}-1)^b$.

8. Порівняйте числа a і b , якщо:

1) $a^{\sqrt{2}} > b^{\sqrt{3}}$;

2) $a^{\frac{1}{8}} > b^{\frac{3}{7}}$;

3) $a^{-\sqrt{20}} < b^{-2\sqrt{3}}$;

4) $a^{1-\sqrt{3}} < b^{2-\sqrt{3}}$.

9. Обчисліть або подайте у вигляді степеня вираз:

1) $2^{\sqrt{2}} \cdot 4$;

2) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$;

3) $(2^{\sqrt{5}})^2 \cdot 2^{-\sqrt{20}}$;

4) $\frac{2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{2\sqrt{3}}}{4^{\sqrt{3}}}$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $(4^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}}$; 2) $(5^{\sqrt[3]{4}})^{\sqrt[3]{2}}$; 3) $20^{\sqrt{3}} \cdot 2^{2-2\sqrt{3}} \cdot 5^{-\sqrt{3}}$; 4) $5^{(\sqrt{2}-1)^2} \cdot 25^{\sqrt{2}}$.

2. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $5^{1-2\sqrt{2}} \cdot 2^{1-2\sqrt{2}} \cdot 10^{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{9^{\sqrt{3}} \cdot (3^{3\sqrt{3}})^2}{27^{2\sqrt{3}}}$.

3. Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$; 3) $\left((3^{\sqrt[3]{7}})^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; 4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

4. Порівняйте з числом 1 степеневий вираз:

1) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\pi}$; 2) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

5. При яких дійсних значеннях a правильна рівність:

1) $2^{a+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}$; 2) $3^{a^2+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2a}$; 3) $3^{a^2+2} \cdot 4^{a^2+2} = 12^{3a}$; 4) $3^{|a-1|} = (\sqrt{3})^{a+1}$?

6. Порівняйте $(7+4\sqrt{3})^{-5,2}$ і $(7-4\sqrt{3})^{5,6}$.

7. Порівняйте $(2+\sqrt{3})^{-\pi}$ і $(2-\sqrt{3})^{\pi}$.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

- 1.** Наближені обчислення степенів з ірраціональними показниками.
- 2.** Аналіз похибок під час обчислення степенів з дійсними показниками.
- 3.** Використання степенів з дійсним показником у фінансових розрахунках.
- 4.** Порівняння різних способів обчислення степеневих виразів.







