

Урок 1. Степінь з дійсним показником

План уроку

1. Поняття степеня з дійсним показником.
2. Властивості степенів з дійсними показниками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому для масштабування зображень у графічних редакторах і цифрових картах недостатньо цілих показників степеня?

2) Чому під час розрахунку складних відсотків у фінансах використовують дробові показники степеня?

3) Чому для моделювання росту або зменшення популяцій у біології застосовують дійсні показники степеня?

4) Як змінюється концентрація ліків в організмі з часом і чому це описують степеневими моделями?

5) Чому в обробці звуку та сигналів гучність і інтенсивність описують степенями з дійсними показниками?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $x^4 = \frac{1}{16}$.

Відповідь. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

2. Спростіть вираз $a^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{3}}$

Відповідь. $a^{\frac{1}{2}}$.

3. Скоротіть дріб $\frac{m^{\frac{1}{2}} - 9}{m^{\frac{1}{4}} + 3}$

Відповідь. $m^{\frac{1}{4}} - 3$.

4. Знайдіть значення n , якщо $\sqrt{\frac{1}{6}\sqrt{6\sqrt{\frac{1}{6}}}} = 6^n$

Відповідь. $-\frac{3}{8}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Ентомолог, вивчаючи нашествия саранчі дослідив, що площа (у м²), заражена саранчею, змінюється за формулою $S_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$, де n — кількість тижнів після зараження. Знайдіть:

- 1) початкову площу зараження;
- 2) площу зараження через 8 тижнів;
- 3) площу зараження через 12 тижнів.

III. Поняття степеня з дійсним показником (5 хв)

Нам уже відоме поняття степеня з натуральним, цілим та раціональним показниками. Спробуємо пояснити, що таке степінь з ірраціональним показником.

Розглянемо окремий випадок, з'ясуємо що розуміють під степенем числа 2 з показником π .

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу $\pi = 3,1415\dots$

Розглянемо послідовність раціональності чисел: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ...

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π .

Відповідно до заданої послідовності побудуємо послідовність степенів з раціональними показниками: $2^3, 2^{3,1}, 2^{3,14}, 2^{3,141}, 2^{3,1415}, \dots$

Можна показати, що члени цієї послідовності зі збільшенням номера прямують до деякого додатного числа. Це число називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^π .

Розглянемо загальний випадок.

1) Розглянемо вираз b^α , де $b > 0$, а α — ірраціональне число.

2) Побудуємо для числа α послідовність раціональних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, таку що $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$.

3) Далі розглянемо послідовність $b^{\alpha_1}, b^{\alpha_2}, \dots, b^{\alpha_n}$ степенів з раціональними показниками.

4) Можна довести (спробуйте зробити це в рамках дослідницького проекту), що утворена послідовність збіжна, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{\alpha_n} = c$, причому число c не залежить від вибору збіжної до числа α послідовності раціональних чисел.

5) Число c називають степенем числа b з ірраціональним показником α .

Відмітимо, що:

1) $1^\alpha = 1$ для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$;

2) $0^\alpha = 0$ лише для $\alpha > 0$, тобто $0^\pi = 0$, $0^{\sqrt{3}} = 0$, але вираз $0^{-\sqrt{2}}$ не має змісту.

IV. Властивості степенів із дійсними показниками (4–5 хв)

Степінь з дійсним показником має властивості аналогічні степеню з раціональним показником. Для $a > 0$ і $b > 0$ і для будь-яких дійсних чисел m і n :

1) $a^n a^m = a^{n+m}$;

2) $a^n : a^m = a^{n-m}$;

3) $(a^n)^m = a^{nm}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Доведення. Нехай m і n — дійсні числа, при чому $m = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k$, $n = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k$, де (m_k) і (n_k) — послідовності раціональних чисел. Маємо

$$m + n = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k + \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (m_k + n_k).$$

Для додатного числа x розглянемо три послідовності: (x^{m_k}) , (x^{n_k}) , $(x^{m_k} \cdot x^{n_k})$. Маємо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{m_k} = x^m, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k} = x^n.$$

Оскільки для раціональних m_k і n_k властивість 1 має місце, то $x^{m_k} \cdot x^{n_k} = x^{m_k + n_k}$.

Послідовність раціональних чисел $m_1 + n_1$, $m_2 + n_2$, $m_3 + n_3$, ... збігається до числа $m + n$. Тому можна записати, що $\lim_{k \rightarrow \infty} (m_k \cdot n_k) = x^{m+n}$.

$$x^m \cdot x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{m_k} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x^{m_k} \cdot x^{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{m_k + n_k} = x^{m+n}.$$

Ілюстративні приклади (6–8 хв)

5. Обчисліть $\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.

Розв'язання. $\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)^{-2} = \left(\sqrt[4]{2^2}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$

Відповідь. 2.

6. Спростіть вираз $a^{\sqrt{2}} : a^{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2}$.

Розв'язання. $a^{\sqrt{2}} : a^{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2} = a^{\sqrt{2} - \frac{1}{2}(2+2\sqrt{2}+1)} = a^{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}} = a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^{1,5}}$

Відповідь. $\frac{1}{a^{1,5}}$.

7. Спростіть вираз $\frac{a^{2\sqrt{5}} - 4}{a^{2\sqrt{5}} - 2a^{\sqrt{5}}}$.

Розв'язання. $\frac{a^{2\sqrt{5}} - 4}{a^{2\sqrt{5}} - 2a^{\sqrt{5}}} = \frac{(a^{\sqrt{5}})^2 - 4}{(a^{\sqrt{5}})^2 - 2a^{\sqrt{5}}} = \frac{(a^{\sqrt{5}} - 2)(a^{\sqrt{5}} + 2)}{a^{\sqrt{5}}(a^{\sqrt{5}} - 2)} = \frac{a^{\sqrt{5}} + 2}{a^{\sqrt{5}}}$

Відповідь. $\frac{a^{\sqrt{5}} + 2}{a^{\sqrt{5}}}$.

8. Спростіть вираз $\frac{(a^{\sqrt{7}} + 1)(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}}}.$

Розв'язання. $\frac{(a^{\sqrt{7}} + 1)(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}}} = \frac{(a^{\sqrt{7}} + 1)(a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}} + 1)a^{\sqrt{7}}}{(a^{3\sqrt{7}} + 1)a^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{3\sqrt{7}} + 1}{a^{3\sqrt{7}} + 1} = 1.$

Відповідь. 1.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Ентомолог, вивчаючи нашествия саранчі дослідив, що площа (у м²), заражена саранчею, змінюється за формулою $S_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$, де n — кількість тижнів після зараження. Знайдіть:

- 1) початкову площу зараження;
- 2) площу зараження через 8 тижнів;
- 3) площу зараження через 12 тижнів.

Розв'язання. 1) Початок зараження відповідає $n = 0$. Підставимо $n = 0$ у формулу

$$S_n = 1000 \cdot 2^{0,2n};$$

$$S_0 = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 0} = 1000 \text{ (м}^2\text{)}.$$

2) Площу зараження через 8 тижнів обчислимо при $n = 8$:

$$S_8 = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 8} = 1000 \cdot 2^{1,6}.$$

Оскільки $2^{1,6} = 2^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{2^8} \approx 3,03$, то $S_8 = 1000 \cdot 3,03 \approx 3031 \text{ (м}^2\text{)}.$

3) Площу зараження через 12 тижнів обчислимо при $n = 12$:

$$S_{12} = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 12} = 1000 \cdot 2^{2,4}.$$

Оскільки $2^{2,4} = 2^{\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{2^{12}} \approx 5,28$, то $S_{12} = 1000 \cdot 5,28 \approx 5280 \text{ (м}^2\text{)}.$

Відповідь. 1000 м²; 3031 м²; 5280 м².

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

$$1) 32^{0,4}; \quad 2) \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4}; \quad 3) (9^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}; \quad 4) 49^{0,25} \cdot \sqrt{7}.$$

2. Чи має зміст вираз:

$$1) (-3)^{\sqrt{3}}; \quad 2) 0^{\sqrt{7}}; \quad 3) 2^{-2\sqrt{2}}; \quad 4) 0^{-\sqrt{5}}.$$

3. Знайдіть значення виразу:

$$1) 2^{5,3} \cdot 2^{-0,3}; \quad 2) 3^{6,8} \cdot 3^{-5,8}; \quad 3) 8^{\frac{1}{2}} 8^{3,5}; \quad 4) \left(\frac{3}{4}\right)^{3,7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-0,7}.$$

4. Доведіть, що:

$$1) \frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{2}}; \quad 2) 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} = (16^{\sqrt{3}})^{-2}.$$

5. Яке число більше за 1, а яке менше від 1:

- 1) $1,8^{\sqrt{1,8}}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$; 3) $7^{-\sqrt{2}}$; 4) $0,3^{-\pi}$?

6. Спростіть вираз:

- 1) $(a - x^{0,5})(a + x^{0,5})$; 2) $\left(c^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{4}}\right)\left(c^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}\right)$;
 3) $(a - b) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$; 4) $(1 - x) : \left(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)$.

7. Спростіть вираз:

- 1) $(a^{\sqrt{5}} + 2)(a^{\sqrt{5}} - 2) - (a^{\sqrt{5}} + 3)^2$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{3\sqrt{7}}}$.

8. Порівняйте числа:

- 1) $x^{-\sqrt{3}}$ 1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{6}{13}}$ і $\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{6}{13}}$; 2) $0,021^{-\frac{1}{3}}$ і $0,022^{-\frac{1}{3}}$;
 3) $(2\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ і $(3\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$; 4) $(\sqrt{21})^{\frac{4}{9}}$ і $(2\sqrt{5})^{\frac{4}{9}}$.

Рівень В

1. Знайдіть область допустимих значень виразу:

- 1) $x^{-\sqrt{3}}$; 2) $x^{\sqrt{7}}$; 3) $(2 - x)^{-2\sqrt{2}}$; 4) $(x^2 - 1)^{\sqrt{5}}$.

2. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(\sqrt{5})^{3,6} \cdot (\sqrt{5})^{-1,6}$; 2) $(\sqrt{7})^{-0,2} \cdot (\sqrt{7})^{-3,8}$;
 3) $(\sqrt[3]{2})^{4,7} \cdot (\sqrt[3]{2})^{-1,7}$; 4) $(\sqrt[5]{3})^{\frac{1}{3}} \cdot (\sqrt[5]{3})^{\frac{31}{3}}$.

3. Порівняйте з числом 1 степінь:

- 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$; 3) $0,6^{2\sqrt{5}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$.

4. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}{(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})^2} + 1$; 2) $\frac{a^{\sqrt[3]{24}} - 1}{a^{\sqrt[3]{3}} - 1} - \frac{a^{\sqrt[3]{81}} + 1}{a^{\sqrt[3]{3}} + 1}$.

5. Знайдіть значення виразу:

- 1) $16^{0,25+\sqrt{20}} : 16^{2\sqrt{5}}$; 2) $7^{\sqrt{12}} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\sqrt{3}} + 216^{\frac{1}{3}}$.

6. Порівняйте числа:

- 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{4}}$ і 1; 2) $3^{-\sqrt{12}}$ і $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; 3) $7,2^{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$ і 1; 4) $0,25^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ і $0,25^{\frac{1}{3}}$.

7. Порівняйте числа a і b , якщо:

- 1) $0,12^a > 0,12^b$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^a < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^b$;

$$3) (\sqrt{7})^a < (\sqrt{7})^b;$$

$$4) (\sqrt{2}-1)^a > (\sqrt{2}-1)^b.$$

8. Порівняйте числа a і b , якщо:

$$1) a^{\sqrt{2}} > b^{\sqrt{3}};$$

$$2) a^{\frac{1}{8}} > b^{\frac{3}{7}};$$

$$3) a^{-\sqrt{20}} < b^{-2\sqrt{3}};$$

$$4) a^{1-\sqrt{3}} < b^{2-\sqrt{3}}.$$

9. Обчисліть або подайте у вигляді степеня вираз:

$$1) 2^{\sqrt{2}} \cdot 4;$$

$$2) (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}};$$

$$3) (2^{\sqrt{5}})^2 \cdot 2^{-\sqrt{20}};$$

$$4) \frac{2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{2\sqrt{3}}}{4^{\sqrt{3}}}.$$

Рівень С

1. Обчисліть:

$$1) (4^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}};$$

$$2) (5^{\sqrt[3]{4}})^{\sqrt[3]{2}};$$

$$3) 20^{\sqrt{3}} \cdot 2^{2-2\sqrt{3}} \cdot 5^{-\sqrt{3}}; \quad 4) 5^{(\sqrt{2}-1)^2} \cdot 25^{\sqrt{2}}.$$

2. Подайте у вигляді степеня вираз:

$$1) 5^{1-2\sqrt{2}} \cdot 2^{1-2\sqrt{2}} \cdot 10^{2\sqrt{2}};$$

$$2) \frac{9^{\sqrt{3}} \cdot (3^{3\sqrt{3}})^2}{27^{2\sqrt{3}}}.$$

3. Обчисліть значення виразу:

$$1) 3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}};$$

$$2) \sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}};$$

$$3) \left((3^{\sqrt[3]{7}})^{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{3}};$$

$$4) \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}} \right)^{-\sqrt{8}}.$$

4. Порівняйте з числом 1 степеневий вираз:

$$1) \left(\frac{4}{5} \right)^{\pi};$$

$$2) \left(\frac{\pi+1}{4} \right)^{-\sqrt{6}}.$$

5. При яких дійсних значеннях a правильна рівність:

$$1) 2^{a+3} = \left(\frac{1}{2} \right)^{a-1};$$

$$2) 3^{a^2+1} = \left(\frac{1}{3} \right)^{2a};$$

$$3) 3^{a^2+2} \cdot 4^{a^2+2} = 12^{3a}; \quad 4) 3^{|a-1|} = (\sqrt{3})^{a+1}?$$

6. Порівняйте $(7+4\sqrt{3})^{-5,2}$ і $(7-4\sqrt{3})^{5,6}$.

7. Порівняйте $(2+\sqrt{3})^{-\pi}$ і $(2-\sqrt{3})^{\pi}$.

VII. Рефлексія (2 хв)

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію

- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

1. Наближені обчислення степенів з ірраціональними показниками.
2. Аналіз похибок під час обчислення степенів з дійсними показниками.
3. Використання степенів з дійсним показником у фінансових розрахунках.
4. Порівняння різних способів обчислення степеневих виразів.

Список використаних джерел

- 1) Істер О. С., Єрміна О. С. Алгебра і початки аналізу : профільний рівень : підручн. для 11 класу закладів загальної середньої освіти. — Київ : Генеза, 2019. — 416 с. : іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін. Алгебра і початки аналізу : профільний рівень : підручн. для 11 класу закладів загальної середньої освіти. — Харків : Гімназія, 2019. — 352 с. : іл.
- 3) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу : профільний рівень : підручн. для 11 класу закладів загальної середньої освіти. — Харків : Гімназія, 2019. — 304 с. : іл.
- 4) Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу : профільний рівень : підручн. для 11 класу закладів загальної середньої освіти. — Харків : Ранок, 2019. — 240 с.