

Урок 10. Показникові нерівності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

вивчите означення показникових нерівностей;

повторите й застосуєте властивості показникової функції при розв'язуванні нерівностей;

навчитеся розв'язувати показникові нерівності шляхом зведення лівої і правої частин до спільної основи та використання монотонності показникової функції;

застосуєте набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $27^{2x+1} = 9$.
2. Розв'яжіть рівняння $3^{x+2} + 3^{x+3} = 108$.
3. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ 3 \cdot 2^x - 2^y = 10. \end{cases}$$
4. Порівняйте значення дійсних чисел m і n , якщо $\left(\frac{2}{3}\right)^m < \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
5. Порівняйте з одиницею додатне число a , якщо $a^{-1,5} > a^{2,5}$.

III. Означення показникових нерівностей

Означення. Нерівність називають **показниковою**, якщо її змінні входять лише до показників степенів при сталих основах.

Нерівності $0,2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ є прикладами показникових нерівностей.

Теорема. Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$.

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Справедливість цієї теореми впливає з того, що при $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною.

IV. Використання монотонності показникової функції для розв'язування показникових нерівностей

Розв'язання найпростіших показникових нерівностей виду $a^x > b$ (або $a^x < b$), де $a > 0$ і $a \neq 1$, ґрунтується на властивостях функції $y = a^x$, яка зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$. Наприклад, щоб знайти множину розв'язків нерівності $a^x > b$ при $b > 0$, достатньо подати b у вигляді $b = a^c$. Одержуємо нерівність $a^x > a^c$.

- При $a > 1$ функція $y = a^x$ зростає, тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента, тому з даної нерівності одержуємо $x > c$ (знак нерівності збігається зі знаком початкової нерівності).
- При $0 < a < 1$ функція $y = a^x$ спадає, тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента, тому одержуємо нерівність $x < c$.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leq 7$.

[illegible]

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{3x}{2} + 3} > 16$.

[illegible]

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x+2-x^2} \leq \frac{25}{36}$.

[illegible]

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Двоє блогерів почали змагання — у кого з них більше підписників на акаунт у соціальних мережах. У першого з них на початковому етапі було 4900 підписників, а у другого — 6400. Кількість підписників першого блогера зростає щомісячно на 20%, а другого — лише на 5%. Допоможіть їм визначити, через скільки місяців кількість підписників першого блогера перевищить кількість підписників другого?

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^x > 9$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$; 3) $4^x < \frac{1}{2}$; 4) $2^{3x} \geq \frac{1}{2}$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^{x-1} \leq \sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}} > 9$; 3) $2^{-x^2+3x} < 4$; 4) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x-2} > 9$; 2) $0,7^{x^2+2x} < 0,7^3$; 3) $5^{2x} < \frac{1}{25}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \frac{1}{81}$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $0,3^{6x+1} > 0,3^{2x+5}$; 2) $12^{x-5} < 12^{3x+1}$; 3) $3^{5x-1} < 1$; 4) $5^{4x-7} > 1$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x}} \geq 3^{2+x}$; 2) $27^{\frac{1}{x-1}} \leq 3^{\frac{x}{2}}$;
3) $\left(\frac{15}{14}\right)^{x+7} > \left(\frac{15}{14}\right)^{x^2-3x+2}$; 4) $5^{1-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} < 4,8$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$; 2) $9^{x-1} \geq 9^{-2x+8}$;
3) $0,5^{4x+3} \geq 0,5^{6x-1}$; 4) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-3x-0,5} < \left(\frac{7}{11}\right)^{x+1,5}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^x > 0$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \leq 4$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^x \geq 25\sqrt{5}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} < 16$; 3) $0,3^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}} \leq 1$; 4) $1,3^{\frac{x^2-9x+8}{x-4}} \geq 1$.

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 0,9^x \geq 1\frac{19}{81}; \quad 2) 7^{3x-5} - 49 > 0; \quad 3) 0,7^x < 2\frac{2}{49}; \quad 4) 4^{0,5x^2-3} > 8.$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2^{\frac{x}{2}} < 4^{\frac{4}{x}}; \quad 2) \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+2}{x-3}} \geq 25; \quad 3) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x}} \geq 3^{2+x}; \quad 4) 4^{\frac{5+4x}{2-x}} \leq \frac{1}{16}.$$

3. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2^{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \quad 2) 0,1^{1-x} < 0,01; \quad 3) 2^{x^2-7x+14} < 16; \quad 4) 0,2^{1+x^2} \geq \frac{1}{25}.$$

4. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3^{x+0,5} \cdot 3^{x-2} \geq 3; \quad 2) 8^x \cdot 4^{x+13} < \frac{1}{16}; \quad 3) 0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} \leq 2; \quad 4) 2^{x-2} \cdot 4^{1+x} > \frac{1}{8}.$$

5. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \geq \frac{\sqrt{6}}{36}; \quad 2) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \geq \sqrt[4]{10};$$

$$3) \sqrt[3]{0,1} \cdot \sqrt[3]{0,4} \geq 0,0016; \quad 4) \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{2} \leq \frac{\sqrt[15]{4}}{\sqrt[15]{81}}.$$

6. Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}; \quad 2) f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}.$$

7. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5; \quad 2) \left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49}; \quad 3) 0,6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1; \quad 4) 0,3^{\frac{x^2-4}{x-1}} > 1.$$

8. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}; \quad 2) 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x};$$

$$3) \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{x-0,5} > \sqrt{2}; \quad 4) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}$$

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 0,6^{3x^2-5x+3} < 0,6^{3x^2-7}; \quad 2) \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^{x-0,3} > \sqrt{2};$$

$$3) 9^{|x+1|} > 3; \quad 4) \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x-1|} > 16.$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (0,16)^{1+2x} \cdot (6,25)^x \geq 1; \quad 2) 5^{2x-5} > 0,04 \cdot \left(\frac{25}{\sqrt{5}}\right)^{2-4x};$$

$$3) \left(\frac{27}{\sqrt[3]{3}}\right)^{-x} < 9^{4-2x} \cdot 81; \quad 4) 16^{3-2x} \cdot 0,25 \leq \left(\frac{32}{\sqrt{2}}\right)^{4-2x}.$$







