

Урок 10. Показникові нерівності

План уроку

1. Означення показникових нерівностей.
2. Використання монотонності показникової функції для розв'язування показникових нерівностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного [12 МАО 2.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

9) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи може експоненціальне зростання бути небезпечним в житті людей?

2) Чи можна порівняти два процеси, якщо один із них описує показникова функція?

3) Як зміниться певний процес, що зростає експоненціально при збільшенні основи показникової функції, яка його описує?

4) Чому показникова функція використовується в банківській справі? Як це пов'язано з нерівностями?

5) Чи можна за допомогою показникових нерівностей спрогнозувати, коли кількість підписників на вашу сторінку в соціальній мережі перевищить один мільйон?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть рівняння $27^{2x+1} = 9$.

Відповідь. $-\frac{1}{6}$.

2. Розв'яжіть рівняння $3^{x+2} + 3^{x+3} = 108$.

Відповідь. 1.

3. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ 3 \cdot 2^x - 2^y = 10. \end{cases}$$

Відповідь. (2; 1).

4. Порівняйте значення дійсних чисел m і n , якщо $\left(\frac{2}{3}\right)^m < \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Відповідь. $m > n$.

5. Порівняйте з одиницею додатне число a , якщо $a^{-1,5} > a^{2,5}$.

Відповідь. $0 < a < 1$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Двоє блогерів почали змагання — у кого з них більше підписників на акаунт у соціальних мережах. У першого з них на початковому етапі було 4900 підписників, а у другого — 6400. Кількість підписників першого блогера зростає щомісячно на 20%, а другого — лише на 5%. Допоможіть їм визначити, через скільки місяців кількість підписників першого блогера перевищить кількість підписників другого?

III. Означення показникових нерівностей

Означення. Нерівність називають **показниковою**, якщо її змінні входять лише до показників степенів при сталих основах.

Нерівності $0,2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ є прикладами показникових нерівностей.

Теорема. Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$.

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Справедливість цієї теореми впливає з того, що при $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною.

IV. Використання монотонності показникової функції для розв'язування показникових нерівностей

Розв'язання найпростіших показникових нерівностей виду $a^x > b$ (або $a^x < b$), де $a > 0$ і $a \neq 1$, ґрунтується на властивостях функції $y = a^x$, яка зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$. Наприклад, щоб знайти множину розв'язків нерівності $a^x > b$ при $b > 0$, достатньо подати b у вигляді $b = a^c$. Одержуємо нерівність $a^x > a^c$.

- При $a > 1$ функція $y = a^x$ зростає, тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента, тому з даної нерівності одержуємо $x > c$ (знак нерівності збігається зі знаком початкової нерівності).
- При $0 < a < 1$ функція $y = a^x$ спадає, тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента, тому одержуємо нерівність $x < c$.

Ілюстративні приклади (8–10 хв)

6. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leq 7$.

Розв'язання. $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leq 7$, $(7^{-2})^{-\frac{x}{2}} \leq 7$, $7^x \leq 7$.

Оскільки функція $y = 7^x$ зростає на множині дійсних чисел, то дана нерівність рівносильна нерівності $x \leq 1$, тобто $x \in (-\infty; 1]$.

Відповідь. $(-\infty; 1]$.

7. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$.

Розв'язання. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}, \left(3^{-2}\right)^{-3x+1} > 3^{\frac{1}{2}}, 3^{6x-2} > 3^{\frac{1}{2}}.$

Оскільки функція $y = 3^x$ зростає на множині дійсних чисел, то дана нерівність рівносильна нерівності $6x - 2 > \frac{1}{2}$, тобто $6x > \frac{5}{2}, x > \frac{5}{12}, x \in \left(\frac{5}{12}; +\infty\right)$

Відповідь. $\left(\frac{5}{12}; +\infty\right).$

8. Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{3x}{2}+3} > 16$.

Розв'язання. $2^{\frac{3x}{2}+3} > 2^4.$

Оскільки функція $y = 2^x$ зростає на множині дійсних чисел, то дана нерівність рівносильна нерівності $\frac{3x}{2} + 3 > 4, \frac{3x}{2} > 1, 3x > 2, x > \frac{2}{3}.$

Відповідь. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right).$

9. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x+2-x^2} \leq \frac{25}{36}.$

Розв'язання. $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x+2-x^2} \leq \frac{25}{36}, \left(\frac{5}{6}\right)^{3x+2-x^2} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^2.$

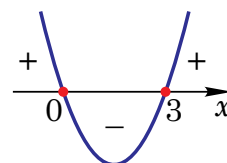
Оскільки функція $y = \left(\frac{5}{6}\right)^x$ — спадає на множині дійсних чисел,

то дана нерівність рівносильна нерівності

$$3x + 2 - x^2 \geq 2, -x^2 + 3x \geq 0, x^2 - 3x \leq 0, x(x - 3) \leq 0,$$

$x \in [0; 3]$ (див. рисунок).

Відповідь. $[0; 3].$



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішу певну проблему?

Задача. Двоє блогерів почали змагання — у кого з них більше підписників на акаунт у соціальних мережах. У першого з них на початковому етапі було 4900 підписників, а у другого — 6400. Кількість підписників першого блогера зростає щомісячно на 20%, а другого — лише на 5%. Допоможіть їм визначити, через скільки місяців кількість підписників першого блогера перевищить кількість підписників другого?

Розв'язання. 1) Функція, яка визначає кількість підписників першого блогера через x місяців: $f(x) = 4900 \cdot 1,2^x$.

Функція, яка визначає кількість підписників другого блогера через x місяців: $g(x) = 6400 \cdot 1,05^x$.

2) Визначимо, при яких значеннях x виконується нерівність $f(x) > g(x)$:

$$4900 \cdot 1,2^x > 6400 \cdot 1,05^x, \quad \frac{1,2^x}{1,05^x} > \frac{6400}{4900}, \quad \left(\frac{1,2}{1,05}\right)^x > \frac{64}{49}, \quad \left(\frac{120}{105}\right)^x > \frac{64}{49}, \quad \left(\frac{8}{7}\right)^x > \left(\frac{8}{7}\right)^2.$$

Оскільки функція $y = \left(\frac{8}{7}\right)^x$ є зростаючою на множині дійсних чисел, то $x > 2$.

Отже, після двох місяців змагання кількість підписників першого блогера перевищуватиме кількість підписників другого.

Відповідь. Через 2 місяці.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3^x > 9; \quad 2) \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}; \quad 3) 4^x < \frac{1}{2}; \quad 4) 2^{3x} \geq \frac{1}{2}.$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 5^{x-1} \leq \sqrt{5}; \quad 2) 3^{\frac{x}{2}} > 9; \quad 3) 2^{-x^2+3x} < 4; \quad 4) \left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}.$$

3. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3^{x-2} > 9; \quad 2) 0,7^{x^2+2x} < 0,7^3; \quad 3) 5^{2x} < \frac{1}{25}; \quad 4) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \frac{1}{81}.$$

4. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 0,3^{6x+1} > 0,3^{2x+5}; \quad 2) 12^{x-5} < 12^{3x+1}; \quad 3) 3^{5x-1} < 1; \quad 4) 5^{4x-7} > 1.$$

5. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x}} \geq 3^{2+x}; \quad 2) 27^{\frac{1}{x-1}} \leq 3^{\frac{x}{2}};$$

$$3) \left(\frac{15}{14}\right)^{x+7} > \left(\frac{15}{14}\right)^{x^2-3x+2}; \quad 4) 5^{1-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} < 4,8.$$

6. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 7^{2x-9} > 7^{3x-6}; \quad 2) 9^{x-1} \geq 9^{-2x+8};$$

$$3) 0,5^{4x+3} \geq 0,5^{6x-1}; \quad 4) \left(\frac{7}{11}\right)^{-3x-0,5} < \left(\frac{7}{11}\right)^{x+1,5}.$$

7. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3^x > 0; \quad 2) \left(\frac{1}{3}\right)^x < 0; \quad 3) \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9; \quad 4) \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \leq 4.$$

8. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 5^x \geq 25\sqrt{5}; \quad 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} < 16; \quad 3) 0,3^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}} \leq 1; \quad 4) 1,3^{\frac{x^2-9x+8}{x-4}} \geq 1.$$

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 0,9^x \geq 1\frac{19}{81}; \quad 2) 7^{3x-5} - 49 > 0; \quad 3) 0,7^x < 2\frac{2}{49}; \quad 4) 4^{0,5x^2-3} > 8.$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2^{\frac{x}{2}} < 4^{\frac{4}{x}}; \quad 2) \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+2}{x-3}} \geq 25; \quad 3) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x}} \geq 3^{2+x}; \quad 4) 4^{\frac{5+4x}{2-x}} \leq \frac{1}{16}.$$

3. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2^{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \quad 2) 0,1^{1-x} < 0,01; \quad 3) 2^{x^2-7x+14} < 16; \quad 4) 0,2^{1+x^2} \geq \frac{1}{25}.$$

4. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3^{x+0,5} \cdot 3^{x-2} \geq 3; \quad 2) 8^x \cdot 4^{x+13} < \frac{1}{16}; \quad 3) 0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} \leq 2; \quad 4) 2^{x-2} \cdot 4^{1+x} > \frac{1}{8}.$$

5. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \geq \frac{\sqrt{6}}{36}; \quad 2) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \geq \sqrt[4]{10};$$

$$3) \sqrt[3]{0,1} \cdot \sqrt[3]{0,4} \geq 0,0016; \quad 4) \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{2} \leq \frac{\sqrt[15]{4}}{\sqrt[15]{81}}.$$

6. Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}; \quad 2) f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}.$$

7. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5; \quad 2) \left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49}; \quad 3) 0,6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1; \quad 4) 0,3^{\frac{x^2-4}{x-1}} > 1.$$

8. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}; \quad 2) 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x};$$

$$3) \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{x-0,5} > \sqrt{2}; \quad 4) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}$$

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 0,6^{3x^2-5x+3} < 0,6^{3x^2-7}; \quad 2) \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^{x-0,3} > \sqrt{2};$$

$$3) 9^{|x+1|} > 3; \quad 4) \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x-1|} > 16.$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (0,16)^{1+2x} \cdot (6,25)^x \geq 1; \quad 2) 5^{2x-5} > 0,04 \cdot \left(\frac{25}{\sqrt{5}}\right)^{2-4x};$$

$$3) \left(\frac{27}{\sqrt[3]{3}}\right)^{-x} < 9^{4-2x} \cdot 81; \quad 4) 16^{3-2x} \cdot 0,25 \leq \left(\frac{32}{\sqrt{2}}\right)^{4-2x}.$$

3. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (0,16)^{1+2x} \cdot (6,25)^x \geq 1;$$

$$2) 5^{2x-5} > 0,04 \cdot \left(\frac{25}{\sqrt{5}}\right)^{2-4x};$$

$$3) \left(\frac{27}{\sqrt[3]{3}} \right)^{-x} < 9^{4-2x} \cdot 81;$$

$$4) 16^{3-2x} \cdot 0,25 \leq \left(\frac{32}{\sqrt{2}} \right)^{4-2x}.$$

4. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 5^{x-1} \cdot 2^{x+2} > 8 \cdot 10^{x^2-3x+2};$$

$$2) \ 3^{2x+1} \cdot 2^{2x-3} < 81 \cdot 6^{1-2x^2}.$$

5. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} < \left(\frac{1}{4}\right)^{|x+8|} ;$$

$$2) (\sqrt{3})^{2|x|} \leq 3^{|-x+9|};$$

$$3) (0,2)^{-x\#} > (0,04)^{|x-9|};$$

$$4) (\sqrt{5})^{-3|x|} \geq 5^{-|9x-1|}.$$

6. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geq 0;$$

$$2) (3^{x-2} - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leq 0;$$

$$3) \sqrt{6 \cdot 3^x - 2} > 3^x + 1;$$

4) $\sqrt{2 \cdot 5^{x+1}} - 1 > 5^x + 2.$

7. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leq 0;$$

$$2) \frac{2^x - 1}{x - 1} > 0.$$

8. Розв'яжіть нерівність $10^{4-x} > 7 + x$.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

Як я почуваюсь на уроці?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливо									Чудово

Поради собі для наступного уроку

.

.

.

Можливі теми проєктів

1. Інфляція та індексування заробітної плати і їхній зв'язок із показниковими нерівностями.
2. Поширення вірусів. Модель зростання та межі безпеки.
3. Показникові нерівності в банківських депозитах.
4. Розвиток штучного інтелекту та показникові нерівності.
5. Показникові нерівності та екологічна безпека.

Список використаних джерел

- 1) Нелін Є. П., Долгова О. Є. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. — Харків : Ранок, 2019. — 304 с. : іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. Ч. 1. — Харків : Гімназія, 2011. — 256 с. : іл.