

11

Тема 4.

Показникова функція

Урок 11. **Методи розв'язування показникових нерівностей**

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Основні види показникових нерівностей.
2. Метод розкладу нерівностей на множники.
3. Метод заміни.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає типи можливих результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 1.3.1–1 П];

самостійно або у співпраці з іншими будує математичні моделі специфічних проблемних ситуацій, добирає математичні засоби для побудови моделей, ураховуючи можливі ризики [12 МАО 2.3.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.
- 9) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Яким чином показникові нерівності допомагають визначити час напіврозпаду радіоактивних елементів?
- 2) Чому при розрахунку складних відсотків доцільно використовувати показникові нерівності?
- 3) Як можна оцінити момент, коли концентрація шкідливої речовини перевищить допустиму норму?
- 4) Чому в задачах про поширення вірусів часто застосовують показникові нерівності?
- 5) Чи можна за допомогою показникових нерівностей спрогнозувати ситуацію, коли населення міста перевищить певну кількість?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть множину значень функції $y = 2^x - 2$.
Відповідь. $(-2; +\infty)$.
2. Функцію задано формулою $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Порівняйте $f(-0,3)$ і $f(-0,33)$.
Відповідь. $f(-0,3) < f(-0,33)$.
3. Знайдіть найбільше й найменше значення функції $y = 3^{\sin x + 1}$.
Відповідь. 9; 1.

4. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \frac{1}{5^x - 0,2}$.

Відповідь. $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

5. Знайдіть найбільший корінь рівняння $3^{x^2 - 5x + 8} = 9$.

Відповідь. 3.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У процесі розпаду радіоактивного ізотопу його маса $m(t)$ зменшується за законом $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, де m_0 — початкова маса ізотопу, t — час, що минув від початку розпаду, T — період напіврозпаду у хвилинах. У лабораторії отримали газ, що містить $m_0 = 16$ мг ізотопу азоту-13, період напіврозпаду якого становить $T = 10$ хвилин. Скільки хвилин має пройти, щоб маса ізотопу азоту-13 стала не меншою від 2 мг?

III. Основні види показникових нерівностей

У таблиці подано основні види показникових нерівностей.

Види нерівностей	Приклади
Показникові нерівності, що розв'язуються з використанням монотонності показникової функції.	1) $\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{x}{2}} \leq 7$, 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$, 3) $2^{\frac{3x}{2}+3} > 16$, 4) $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x+2-x^2} \leq \frac{25}{36}$.
Показникові нерівності, які розв'язуються за допомогою розкладу на множники.	1) $5^{x+1} + 5^x > 150$, 2) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x < 15$.
Показникові нерівності, які розв'язуються методом заміни змінних.	1) $4^x + 2^{x+1} - 24 < 0$, 2) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 > 0$.

Основні методи розв'язування показникових нерівностей

1. Метод використання монотонності показникової функції.
2. Метод розкладання на множники.
3. Метод заміни змінних.
4. Функціонально-графічний метод.

Розглянемо реалізацію методів 2) і 3) і, частково, метод 4).

IV. Метод розкладу показникових нерівностей на множники

Метод розкладу на множники є ключовим для розв'язання рівнянь і нерівностей різного рівня складності, а також для аналізу функцій та геометричних задач.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

6. Розв'яжіть нерівність $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 2 \cdot 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1}$.

Розв'язання. $2^x(1+2+4) > 3^x\left(\frac{2}{3}+1+3\right), 2^x \cdot 7 > \frac{14}{3} \cdot 3^x, \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{2}{3}.$

Оскільки функція $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ спадає на множині дійсних чисел, то $x < 1$.

Відповідь. $(-\infty; 1)$.

7. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > \frac{5}{2}$.

Розв'язання. $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > \frac{5}{2}, \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right) > \frac{5}{2}, \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(1 + \frac{3}{2}\right) > \frac{5}{2},$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{5}{2} > \frac{5}{2}, \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1, \left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0.$

Оскільки функція $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ спадає на множині дійсних чисел, то $x < 0$.

Відповідь. $(-\infty; 0)$.

V. Метод заміни змінної у показникових нерівностях

Метод заміни у показникових нерівностях є одним із найзручніших способів спростити складні вирази та звести розв'язання нерівності до відомих типів алгебричних нерівностей. Використання заміни дозволяє перетворити показникову нерівність у квадратну, дробово-раціональну тощо, що значно спрощує пошук розв'язків нерівності. Завдяки заміні можна уникнути складних перетворень з показниковими функціями та отримати спрощену задачу.

Ілюстративні приклади (7–8 хв)

8. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0$.

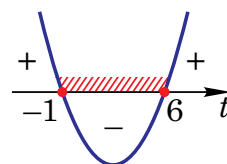
Розв'язання. $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 \leq 0.$

Нехай $\left(\frac{1}{6}\right)^x = t, t > 0$. Одержуємо нерівність $t^2 - 5t - 6 \leq 0$, розв'яз-

ки якої зображено на рисунку.

Отже, $-1 \leq t \leq 6$.

Повернемось до заміни:
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)^x \geq -1, \\ \left(\frac{1}{6}\right)^x \leq 6. \end{cases}$$



Оскільки перша нерівність виконується при всіх дійсних значеннях x , то з другої нерівності маємо: $x \geq -1$.

Відповідь. $[-1; +\infty)$.

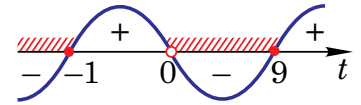
9. Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leq 8$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді: $3^{\sqrt{x}} - \frac{3^2}{3^{\sqrt{x}}} \leq 8$.

Нехай $3^{\sqrt{x}} = t$, $t > 0$, тоді $t - \frac{9}{t} \leq 8$, $\frac{t^2 - 8t - 9}{t} \leq 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = 9$.

Побудуємо криву знаків (див. рисунок).

Отже, $t \in (-\infty; -1] \cup (0; 9]$, тобто $\begin{cases} t \leq -1, \\ t > 0, \\ t \leq 9. \end{cases}$



Повернемось до заміни і врахуємо, що $t > 0$: $\begin{cases} 3^{\sqrt{x}} > 0, \\ 3^{\sqrt{x}} \leq 9. \end{cases}$

Звідси $\sqrt{x} \leq 2$, $0 \leq x \leq 4$.

Отже, $x \in [0; 4]$.

Відповідь. $[0; 4]$.

10. Розв'яжіть нерівність $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} > 0$.

Розв'язання. $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} > 0$.

Поділимо обидві частини нерівності на $3^{2x} > 0$.

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 > 0.$$

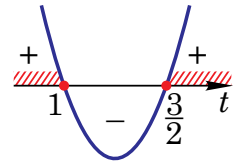
Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, тоді $2t^2 - 5t + 3 > 0$, $(t-1)(2t-3) > 0$.

$t \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, звідси $\begin{cases} t < 1, \\ t > \frac{3}{2}. \end{cases}$

Повернемось до заміни $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{3}{2}; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x < -1. \end{cases}$

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.



VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У процесі розпаду радіоактивного ізоотопу його маса $m(t)$ зменшується за законом $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, де m_0 — початкова маса ізоотопу, t — час, що минув від початку розпаду, T — період напіврозпаду у хвилинах. У лабораторії отримали газ, що містить $m_0 = 16$ мг ізоотопу азоту-13, період напіврозпаду якого становить $T = 10$ хвилин. Скільки хвилин має пройти, щоб маса ізоотопу азоту-13 стала не меншою від 2 мг?

Розв'язання. Оскільки $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, то $16 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} \geq 2$, за умовою.

Тоді $2^{-\frac{t}{10}} \geq \frac{1}{8}$, $2^{-\frac{t}{10}} \geq 2^{-3}$, $-\frac{t}{10} \geq -3$. Звідси $t \leq 30$.

Отже, має пройти не більше 30 хвилин, щоб маса ізоотопу азоту-13 стала не меншою від 2 мг.

Відповідь. Не більше 30 хвилин.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$; 2) $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$; 3) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$; 4) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $9^x - 3^x - 6 > 0$; 2) $4^x - 2^x < 12$; 3) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0$; 4) $4^x + 2^{x+3} - 20 < 0$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$; 2) $\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{x-0,5} > \sqrt{2}$;

3) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} \leq \frac{9}{4}$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x + 2^{x+2} \leq 20$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+4} + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5} > 6$;

3) $3^{2x-1} - 3^{2x-3} < \frac{8}{3}$; 4) $0,3^{6x-1} - 0,3^{6x} \geq 0,7$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 > 0$; 2) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 \geq 0$;
3) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 < 0$; 4) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 \leq 0$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+3} \geq 33$; 2) $5^{x+2} + 11 \cdot 5^x \leq 180$;
3) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} > 75$; 4) $5 \cdot 0,5^{x-3} + 0,5^{x+1} < 162$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$; 2) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $0,9^x \geq 1\frac{19}{81}$; 2) $7^{3x-5} - 49 > 0$; 3) $0,7^x < 2\frac{2}{49}$; 4) $4^{0,5x^2-3} > 8$.

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $4^{x+1} + 4^x > 1,25$; 2) $3^{2x+1} - 9^x < \frac{2}{3}$; 3) $4^x - 4^{x-1} < 3$; 4) $5^x - 5^{x-2} < 24$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x+4} - 4^x < 15$; 2) $5^{x+1} - 25^x \geq 4$;
3) $9^x + 8 > 3^{x+2}$; 4) $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $64 \cdot 5^x - 125 \cdot 4^x > 0$; 2) $81 \cdot 2^x - 16 \cdot 3^x < 0$;
3) $49 \cdot 4^x - 16 \cdot 7^x > 0$; 4) $625 \cdot 3^x - 81 \cdot 5^x < 0$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x-2} + 3^{x-1} < 28$; 2) $3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 = 0$; 3) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; 4) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{5}{12^x + 143} \geq \frac{5}{12^{x+2}}$; 2) $\frac{8}{11^x + 120} \leq \frac{8}{11^{x+2}}$; 3) $\frac{16^x + 42}{16^x} \leq 22$; 4) $\frac{5^x + 15}{5^x} < 4$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $(3^x - 1)(3^{2x} + 3^x + 1) \leq 0$; 2) $(7^x + 1)(7^{2x} - 7^x + 1) \geq 0$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{6x-10} - 9 \cdot 2^{3x-5} + 8 \leq 0$; 2) $5^{2x+1} - 5^{x+2} \leq 5^x - 5$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x+4} - 4^x < 15$; 2) $5^{x+1} - 25^x \geq 4$;
3) $9^x + 8 > 3^{x+2}$ 4) $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}} \leq 6$; 2) $(0,5)^{2\sqrt{x}} + 2 > 3 \cdot (0,5)^{\sqrt{x}}$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^{x+1} - 1 \geq 0$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 27 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 27 < 0$;
3) $2^{3x} + 15 \cdot 2^{2x} + 75 \cdot 2^x + 125 \leq 0$; 4) $0,1^{3x} - 3 \cdot 0,01^x + 3 \cdot 0,1^x - 1 > 0$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^x - 30 \cdot (\sqrt{5})^x + 125 \geq 0$; 2) $0,2^x - 1,2 \cdot (\sqrt{0,2})^x + 0,2 \leq 0$;
3) $3^{x+1} - 28 \cdot (\sqrt{3})^x + 9 \leq 0$; 4) $7^{x+1} - 50 \cdot (\sqrt{7})^x + 7 \geq 0$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^{x+0,5} - 9^x \geq 9^{x-1} - 5^{x-0,5}$;

2) $\frac{1}{3} \cdot 9^{x+1} + 3 \cdot 4^{x-1} + \frac{1}{2} \cdot 9^x \leq 6 \cdot 4^x$;

3) $\frac{x^2 + 3x - 4}{4^x + 2^{x+1} - 80} \geq 0$;

4) $\frac{5^{2x+1} - 5^x - 4}{x^2 + 4x - 5} \leq 0$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x \geq 10$;

2) $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^x + (\sqrt{7-4\sqrt{3}})^x \leq 14$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{8}{4^{x+1} - 4} > 4^x$;

2) $5^x + \frac{15}{2-5^x} < 0$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{2x} - 33 \cdot (1,4)^x - 14 \cdot 5^{1-2x} \leq 0$;

2) $3^{2x} - 35 \cdot (1,5)^x - 9 \cdot 4^{1-x} < 0$.

8. Розв'яжіть нерівність:

1) $(0,2^x - 0,2)(0,04^x + 0,2^{x+1} + 0,04) < 0$;

2) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{9}{4}\right) \cdot \left(\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + \frac{81}{16}\right) > 0$.

9. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{4 - 7 \cdot 5^x}{5^{2x+1} - 12 \cdot 5^x + 4} \leq \frac{2}{3}$;

2) $\frac{2^{x+3} + 11}{2^{2x+1} + 2^x - 15} \leq 3$.

10. Розв'яжіть нерівність:

1) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$.

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x} + 5^{3(x+1)} - 625^{\frac{3}{4}(x-1)} < 15749$.

VIII. Рефлексія (2 хв)

Запропонуйте учням/учницям письмово або усно закінчити речення.

Сьогодні на уроці я зрозумів(ла), що показникові нерівності можна розв'язувати за допомогою

.....

Найбільш корисним для мене був метод

.....

Найбільші труднощі виникли під час

.....

Тепер я можу самостійно

.....

Отримані знання я зможу використати для

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Математичні моделі росту населення та показникові нерівності.
- 2.** Показникові нерівності у сфері інформаційних технологій.
- 3.** Показникові нерівності в соціології.
- 4.** Застосування показникових нерівностей у спорті.
- 5.** Створення тренажера для розв'язування різних типів показникових нерівностей.