

Урок 13. Урок–практикум. Розв’язування показникових нерівностей та їхніх систем**РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) удосконалили свої навички в розв’язуванні показникових нерівностей;
- 2) навчилися розв’язувати показникові нерівності поглибленого рівня;
- 3) дізнаєтесь, як розв’язувати системи показникових нерівностей поглибленого рівня;
- 4) навчилися використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

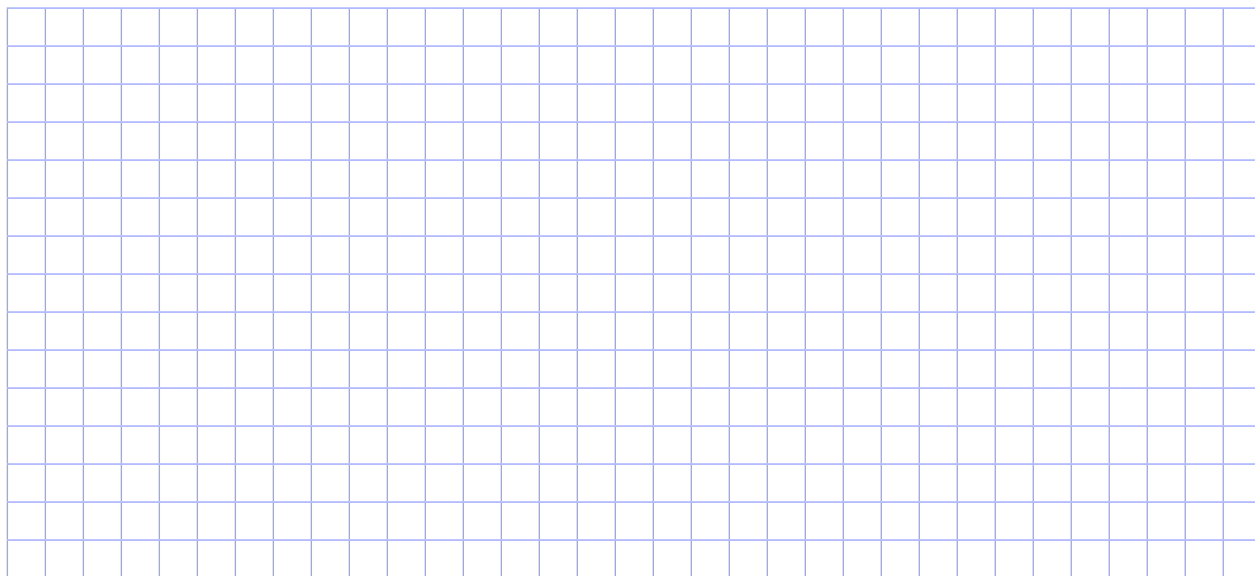
1. Розв’яжіть нерівність $0,2^x > 0,00032$.
2. Розв’яжіть рівняння $\frac{3^{x^2}}{9^x} = 27$.
3. Розв’яжіть рівняння $3^x - 3^{x+3} = -78$.
4. Розв’яжіть рівняння $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.
5. Розв’яжіть нерівність $0 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{64}$.

III. Розв’язування показникових нерівностей поглибленого рівня

Показникові нерівності відіграють важливу роль у математиці, оскільки вони часто є математичними моделями процесів зростання чи спадання у фізиці, в біології, в економіці, в інформатиці тощо. На поглибленому рівні розв’язування показникових нерівностей необхідно вміти застосовувати перетворення показникових виразів, уміння застосовувати заміну змінних та методи дослідження складених функцій. Особли-

востями таких нерівностей є поєднання показникових нерівностей із раціональними, ірраціональними, тригонометричними нерівностями тощо.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\frac{5 \cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$.



Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $x^2 \cdot 5 - 5^{x+2} \leq 0$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді:

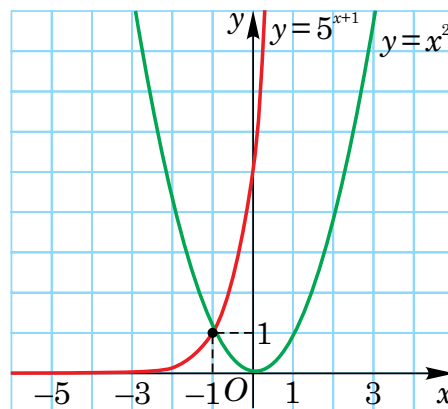
$$x^2 \cdot 5 \leq 5^{x+2}.$$

Поділимо обидві частини нерівності на 5: $x^2 \leq 5^{x+1}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = 5^{x+1}$ (див. рисунок).

Розв'язки нерівності — інтервал $x \in [-1; +\infty)$.

Відповідь. $[-1; +\infty)$.



IV. Розв'язування показникових нерівностей та систем показникових нерівностей з параметрами

Особливість показникових нерівностей з параметрами полягає в необхідності досліджувати, як значення параметра впливає на існування та кількість розв'язків. При розв'язуванні нерівності визначають область допустимих значень, розглядають можливі випадки розв'язків залежно від параметрів та аналізують отримані результати. Остаточну відповідь записують із врахуванням усіх значень параметра, за яких нерівність має розв'язки.

Приклад 3. Знайдіть усі значення параметра k , при яких нерівність $4^x - k \cdot 2^x - k + 3 \leq 0$ має хоча б один розв'язок.

Розв'язання. Нехай $2^x = t > 0$. Маємо квадратну нерівність, що містить числовий параметр k : $t^2 - kt - k + 3 \leq 0$.

Для того, щоб нерівність мала хоча б один розв'язок, потрібно, щоб квадратний тричлен мав хоча б один корінь.

Корені квадратного тричлена будуть дійсними за умови невідємності його дискримінанта: $D = k^2 - 4(3 - k) \geq 0$ або $k^2 + 4k - 12 \geq 0$, звідки $k \leq -6$ або $k \geq 2$.

Використаємо теорему Вієта:
$$\begin{cases} t_1 + t_2 = k, \\ t_1 t_2 = 3 - k. \end{cases}$$

Якщо $k \leq -6$, то $t_1 t_2 = 3 - k > 0$ — добуток коренів додатний, тобто корені мають однакові знаки.

Оскільки сума коренів $t_1 + t_2 = k < 0$, то обидва корені — відємні.

Якщо $k \geq 2$, то $t_1 t_2 = k > 0$, тобто сума коренів додатна. Отже, хоча б один із коренів квадратного тричлена додатний. Отже, $k \geq 2$.

Відповідь. $[2; +\infty)$.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a система
$$\begin{cases} 2^{b \sin x} + (a+1)by^2 = a^2, \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$
 має

розв'язок для будь-якого значення параметра b ?

Розв'язання. Якщо дана система має розв'язок для будь-якого значення параметра b , то ця система має розв'язок і для $b = 0$.

Підставимо значення $b = 0$ у систему й отримаємо:
$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи випливає, що $a = 1$ або $a = -1$.

Нехай $a = 1$. Тоді початкова система матиме вигляд:
$$\begin{cases} 2^{b \sin x} + 2by^2 = 1, \\ y^3 = 1. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $y = 1$, а перше рівняння системи запишемо, як $2^{b \sin x} = 1 - 2b$. Рівняння має розв'язок лише для тих значень параметра b , які задовольняють нерівність $1 - 2b > 0$, тобто $b < \frac{1}{2}$.

Нехай $a = -1$. У цьому випадку початкова система матиме вигляд:

$$\begin{cases} 2^{b \sin x} = 1, \\ y^3 - 2x^3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b \sin x = 0, \\ y^3 = 2x^3 + 1. \end{cases}$$

Легко встановити, що ця система має розв'язок для будь-якого значення параметра b .

Відповідь. -1 .

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У медичній клініці балон із стисненим киснем містить кисень при початковому тиску $P_0 = 15$ МПа. Об'єм балону становить $V_0 = 10$ л. При підготовці до транспортування газ пропускають через спеціальний регулятор, стискаючи його до об'єму $V = 5$ л, у балон меншої ємності, причому теплообмін із навколишнім середовищем майже відсутній (процес адіабатичний). Адіабатичний процес можна описати за допомогою рівняння Пуассона: $PV^k = \text{const}$, де k — показник адіабати. Визначте, в яких межах змінюється показник адіабати, якщо тиск P під час пропускання через регулятор змінюється в межах від $15 \cdot 2^{1,3}$ МПа до $15 \cdot 2^{1,4}$ МПа.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{\sqrt{x+2}} - 2^{\sqrt{x+1}} \leq 12 + 2^{\sqrt{x-1}}$;

2) $3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^x - 2^{x+2} \geq 14$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $4^{2x-3} - 3 \cdot 4^{x-2} - 1 > 0$;

2) $3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 7 \cdot 2^{\frac{x}{4}} < 20$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} \geq \frac{26}{3}$;

2) $3^{1+x} - 2 \cdot 3^{1-x} \leq 7$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $4^x + 2 \cdot 14^x > 3 \cdot 49^x$;

2) $2^{2x+2} - 6^x \leq 18 \cdot 3^{2x}$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $25 \cdot 2^x + 5^x - 10^x \leq 25$;

2) $256 \cdot 7^x - 14^x + 2^x > 256$.

6. Розв'яжіть систему нерівностей
$$\begin{cases} 7^x - 5^{x-2} \geq 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}, \\ 3^x - 2^{x+4} \leq 3^{x-2} - 28 \cdot 2^{x-1}. \end{cases}$$

7. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x-a)\sqrt{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x} \geq 0$.

8. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x-a)\sqrt{6 \cdot 5^x - 5 \cdot 6^x} \leq 0$.

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2-x} (2^{2-2\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{1-\sqrt{x}} + 2) > 0$;

2) $\sqrt{x^2-4} (9^{\sqrt{1-x}} - 12 \cdot 3^{1-\sqrt{x}} + 27) \leq 0$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \leq 0$;

2) $2 \cdot 7^x - 3 \cdot 2^x > \frac{43}{7} \cdot 14^{\frac{x}{2}}$;

3) $10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} \geq 4,25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}$;

4) $4^{x+1,5} + 6^x < 9^{x+1}$.

3. Розв'яжіть нерівність $(\sin 18^\circ)^x + \left(\sin \frac{2\pi}{5}\right)^x < (\sqrt{\pi})^0$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^{x^3+1} - 5^{1-x^3} > 24$;

2) $2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} \geq 7$;

3) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} \leq 3$;

4) $\sqrt[3]{49^x} + 1 < 50\sqrt[3]{7^{x-3}}$.

5. Розв'яжіть систему нерівностей
$$\begin{cases} 2^{x+1} + 1 \geq 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}x}, \\ 3^x + \sqrt{3^{x+2} \cdot 7^x} \leq 3 \cdot 7^x + \sqrt{21^x}. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему нерівностей
$$\begin{cases} 64^x + 5 \cdot 100^x > 6 \cdot 125^x, \\ 8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x < 0. \end{cases}$$

7. Розв'яжіть нерівність $a^{x^2-x} < a^2$.

8. Знайдіть усі значення параметра, при яких, для всіх $x \in R$ виконується нерівність:
- 1) $a \cdot 5^{-x} - (5a + 3) \cdot 5^x + a - 1 < 0$;
 - 2) $a \cdot 9^x + (1 - a) \cdot 3^x - 1,75a + 1 > 0$;
 - 3) $k \cdot 7^x + (4 - 8k) \cdot 7^{-x} > 2k - 1$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність $(1 + \sqrt{7})^x + 2^{x+1}(4 + \sqrt{7})^x < 10$.
2. Розв'яжіть нерівність:
 - 1) $3^x \sqrt{3^{2x} - 6^{x+1} + 9 \cdot 2^{2x}} \leq 2^{2x}$;
 - 2) $8 \cdot 2^x \sqrt{2^{2x} - 10^x} + 0,05 \cdot 5^{2x+1} \geq 5^{2x} - 4 \cdot 10^x + 7 \cdot 2^{2x}$.
3. Розв'яжіть нерівність:
 - 1) $4^{\operatorname{tg} x} - 3 \cdot 2^{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} + 4^{\operatorname{ctg} x + 0,5} = 0$;
 - 2) $4^{\sin x} - 3 \cdot 2^{\sin x + \cos x} + 2 \cdot 4^{\cos x} = 0$.
4. Розв'яжіть нерівність:
 - 1) $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6 \cdot 2^x + \frac{6}{2^{x-1}} < 1$;
 - 2) $5^{3x} + 9 \cdot 5^x + 27(5^{-3x} + 5^{-x}) > 64$.
5. Розв'яжіть нерівність:
 - 1) $75^x - 25^x - 6 \cdot 15^x \geq 6 \cdot 5^x - 5 \cdot 3^x + 5$;
 - 2) $8^x + 10^x - 2^{x+1} \leq 12^x + 15^x - 2 \cdot 3^x$.
6. Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} \frac{(4^x - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 5)(3^{|x+1|} - 9^x)}{((0,3)^{x^2+2} - (0,3)^{3x})(7^{\sqrt{x^2+3}} - 49^x)} \geq 0, \\ \frac{(2^{|3x+5|} - 2^{|5x+3|})(0,7)^{x^2-1} - 1}{(0,1)^{\sqrt{5+4x}} - 100^{x+0,5}} \geq 0. \end{cases}$$
7. При яких значеннях параметрів a і b система $\begin{cases} ax + by = 7, \\ 3^{2(x-y)} - 6 \cdot 3^{-2x} - 3^{-y} > 0 \end{cases}$ має розв'язки?
8. При яких значеннях параметра a кожен розв'язок нерівності $0,4^{x^2+1} \geq 6,25^{a-3x}$ є розв'язком нерівності $x^2 - 6x + 4 < a^2$?

Рефлексія

Позначте на числовій прямій свої успіхи в розв'язанні задач сьогоднішнього уроку від 0 балів до 10 балів.



- 1) Що нового я сьогодні дізнався/дізналася?

.....

2) Чи зрозумів/зрозуміла я методи розв'язання систем показникових нерівностей? Якщо ні, то що залишилося незрозумілим?

.....
.....
.....

3) Чи зрозумів/зрозуміла я методи розв'язання показникових нерівностей з параметрами? Якщо ні, то що залишилося незрозумілим?

.....
.....
.....

4) Які помилки я зробив/зробила під час роботи? Як їх виправити в майбутньому?

.....
.....
.....

5) Які поради я можу запропонувати для однокласників/однокласниць, щоб ефективніше розв'язувати системи показникових нерівностей?

.....
.....
.....

6) Як я можу застосувати знання про системи нерівностей у житті?

.....
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Системи показникових нерівностей в прикладних задачах.
- 2.** Показникові нерівності у криптографії.
- 3.** Аналіз подібності та відмінності показникових і степеневих нерівностей.
- 4.** Дослідження нестандартних методів розв'язування показникових нерівностей.
- 5.** Графічне дослідження систем показникових нерівностей із двома змінними.



