

Урок 14. Узагальнення та систематизація методів розв'язування показникових рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

узагальните способи розв'язування показникових рівнянь

систематизуєте методи розв'язування показникових нерівностей;

навчитеся обирати раціональний спосіб розв'язування залежно від виду рівняння або нерівності;

удосконалите навички розв'язування систем, що містять показникові рівняння та нерівності;

перевірите та оціните власний рівень засвоєння теми;

застосуєте набуті знання для розв'язування задач різного рівня складності.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $0,2^{3x-1} = \sqrt{125}$.
2. Розв'яжіть рівняння $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$.
3. Знайдіть суму коренів рівняння $(3^{2x^2-29} - 27)\sqrt[4]{5x+18} = 0$.
4. Розв'яжіть нерівність $0,5^{2x+7} \leq 4$.
5. Розв'яжіть нерівність $4^{\frac{x+1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 > 0$.

III. Розв'язування показникових рівнянь та систем показникових рівнянь

Пригадаємо основні методи розв'язування показникових рівнянь.

1. Зведення до однієї основи.

Розв'яжемо рівняння $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$. Маємо: $2^{7-3x} = 2^{4-x}$,

$$7 - 3x = 4 - x, \quad 2x = 3, \quad x = 1,5.$$

Відповідь. 1,5.

2. Рівняння $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, які не зводяться до однієї основи.

Розв'яжемо рівняння $3^{x+2} = 5^{x+2}$.

Поділимо обидві частини рівняння на $5^{x+2} \neq 0$.

$$\text{Одержимо: } \frac{3^{x+2}}{5^{x+2}} = 1, \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{5}\right)^0, \quad x+2=0, \quad x=-2.$$

Відповідь. -2.

3. Винесення спільного множника за дужки.

Розв'яжемо рівняння $2 \cdot 7^{x+1} - 6 \cdot 7^{x-1} - 7^x = 85$.

Винесемо за дужки множник з найменшим показником: 7^{x-1} .

$$\text{Матимемо } 7^{x-1} (2 \cdot 7^2 - 6 - 7) = 85, \quad 7^{x-1} \cdot 85 = 85,$$

$$7^{x-1} = 7^0, \quad x-1=0, \quad x=1.$$

Відповідь. 1.

4. Рівняння, які зводяться до квадратних.

4.1. Рівняння виду $A \cdot a^{2x} + B \cdot ax + C = 0$.

Уведемо заміну $a^x = t, t > 0$ й одержимо квадратне рівняння.

Наприклад, розв'язати рівняння $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$.

Нехай $2^x = t$, тоді маємо $t^2 - 10t + 16 = 0$.

$$\text{Звідси } \begin{cases} t_1 = 2, \\ t_2 = 8. \end{cases} \quad \text{Повертаємось до заміни: } \begin{cases} 2^x = 2, \\ 2^x = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

Відповідь. 1; 3.

4.2. Рівняння виду $A \cdot a^x + B \cdot a^{-x} = C$.

За допомогою заміни $a^x = t, t > 0$ рівняння можна звести до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $5^x + 5 \cdot 5^{-x} = 6$.

$$\text{Нехай } 5^x = t, \text{ тоді маємо: } t + \frac{5}{t} = 6, \quad t^2 - 6t + 5 = 0, \quad \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = 5. \end{cases}$$

$$\text{Повертаємось до заміни: } \begin{cases} 5^x = 1, \\ 5^x = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

Відповідь. 0; 1.

5. Однорідні показникові рівняння $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C \cdot b^{2x} = 0$.

Поділимо обидві частини рівняння на $a^{2x} \neq 0$, тоді одержимо рівняння

$$A + B \left(\frac{b}{a}\right)^x = C \left(\frac{b}{a}\right)^{2x}. \quad \text{Виконаємо заміну } \left(\frac{b}{a}\right)^x = t, t > 0 \text{ і зведемо рівняння до ква-}$$

дратного.

Наприклад, розв'яжемо рівняння $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

$$\text{Маємо } 3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 4^x \cdot 9^x.$$

$$\text{Поділимо обидві частини рівняння на } 9^{2x} \neq 0: 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0.$$

Нехай $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t, t > 0$, тоді маємо $3t^2 - 5t + 2 = 0$, $\begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$

Повертаємось до заміни: $\begin{cases} \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1, \\ \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} \left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^0, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ 2x = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = 0,5. \end{cases}$

Відповідь. 0; 0,5.

6. Рівняння виду $A^x + B^x = C$, де $A \cdot B = 1$.

Уведемо заміну $A^x = t, t > 0$. Тоді $B^x = \frac{1}{t}$ і рівняння можна звести до квадратного.

Наприклад, розв'яжемо рівняння $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 6$.

Нехай $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = t, t > 0$. Тоді $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Одержимо $t + \frac{1}{t} = 6, t^2 - 6t + 1 = 0$, $\begin{cases} t_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \\ t_2 = 3 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$

Повертаємось до заміни: $\begin{cases} \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3 + 2\sqrt{2}, \\ \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3 - 2\sqrt{2}; \end{cases} \begin{cases} \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 3 + 2\sqrt{2}, \\ \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ x = -2. \end{cases}$

Відповідь. -2; 2.

7. Використання монотонності функцій.

Розв'язати рівняння $2^x = 3 - x$.

Методом підбору знаходимо, що $x = 1$ – корінь рівняння. Функція $y = 2^x$ зростаюча, а функція $y = 3 - x$ — спадна, тому знайдений корінь — єдиний.

Відповідь. 1.

IV. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Чашка кави об'ємом 240 мл містить 120 мг кофеїну. Відомо, що кофеїн поступово виводиться з організму людини. Середній період половинного виведення кофеїну становить 5 годин. Це означає, що кожні 5 годин кількість кофеїну в організмі зменшується вдвічі.

1) Складіть формулу, яка описує залежність кількості кофеїну в організмі від часу t (у годинах), якщо початкова кількість кофеїну становить 120 мг.

2) Визначте, скільки кофеїну залишиться в організмі через 5 годин після вживання кави.

3) Визначте, скільки кофеїну залишиться в організмі через 10 годин після вживання кави.

4) Чи залишиться в організмі більше ніж 20 мг кофеїну через 15 годин після вживання кави? Поясніть відповідь.

5) Поясніть, чому знання закономірностей зменшення кофеїну може допомогти людині планувати режим дня.

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^x = 539$;

2) $4^{x+1} + 4^x = 320$;

3) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-2} = 79$;

4) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 162$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $(0,6)^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}} = 1$;

2) $(5^{x-3})^{x-1} = 25^x \cdot 125^{x+1}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$;

2) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x = 3$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x + 3^x + 4^x < 99$;

2) $(\sqrt{5})^x + 2^x > 27^{\frac{x}{3}}$.

5. Розв'яжіть систему нерівностей
$$\begin{cases} 4^{0,5-x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0, \\ 5^{2x-1} + 5^{x+1} > 250. \end{cases}$$

6. По електричному колу, яке має опір R і коефіцієнт самоіндукції L , проходить струм із силою I_0 . Якщо вимкнути джерело постачання, сила струму почне змінюватися за законом $I(t) \approx I_0 \cdot 2,7^{-\frac{Rt}{L}}$. Визначте, через який час сила струму зменшиться в 10 разів, якщо $R = 0,32$ Ом, $L = 0,004$ Г.

7. Розв'яжіть нерівність $(2^x - 8)(x^2 - 4x + 3) > 0$. У відповідь запишіть добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

8. Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{2^{x+1} - 1} > \frac{1}{2^x + 3}$. У відповідь запишіть середину проміжку, який є розв'язком нерівності.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$;

2) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$;

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $8^x \cdot 7^{x-4} = 2^{4+2x}$;

2) $6^x \cdot 5^{x-2} = 9 \cdot 2^x$;

3) $27 \cdot 7^{x+3} = 147^x$;

4) $625 \cdot 9^{x-2} = 15^x$;

5) $7 \cdot 16^x = 2 \cdot 56^x$;

6) $125 \cdot 8^x = 50^{x+1}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$;

2) $2^x + 2^{2-x} = 5$;

3) $2^{x+1} + 4^x = 80$;

4) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $10 \cdot 81^x + 9 \cdot 225^x - 9 \cdot 625^x = 0$;

2) $2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^{x+1} = 0$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6$;

2) $(27^x + 27^{-x}) + 2(3^x + 3^{-1}) = 6$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x < 3 - 2x - x^2$;

2) $3^{-x} > \sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq -\frac{3}{x}$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq x^3 - 1$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} < 0$;

2) $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} \leq 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

8. Розв'яжіть нерівність $(\sqrt{5}-2)^x + (\sqrt{5}+2)^x < 2\sqrt{5}$. У відповідь запишіть суму всіх розв'язків нерівності.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = 8$;

2) $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(42 - 6^{\frac{2x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 6$;

2) $\left(100 + 5^{\frac{3x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{2x+1}} = 5$;

3) $\left(4^{\frac{x+1}{x}} - 12\right)^{\frac{x}{2x-1}} = 4$;

4) $4 \cdot 3^x + 3\sqrt{6^x} - 27 \cdot 2^{x-1} = 0$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{\frac{x+6}{x+2}} - 3^{\frac{x+4}{x+2}} = 18$;

2) $5^{\frac{x+1}{x-3}} - 23 \cdot 5^{\frac{x-1}{x-3}} = 250$;

3) $2^{\frac{x+1}{x-1}} - 6 \cdot 2^{\frac{x}{x-1}} + 16 = 0$;

4) $3^{\frac{4x}{2x-1}} - 6 \cdot 3^{\frac{4x-1}{2x-1}} = 243$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$;

2) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{24}{1-25^{-x}} \leq \frac{1}{5^{-x}-6}$;

2) $\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 33 \cdot 3^{x-2} - 5} \geq 5$;

3) $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0$;

4) $\frac{8 \cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

6. Розв'яжіть систему нерівностей
$$\begin{cases} 8x + 16\sqrt{2-x^2} > 8 + (x^2-x) \cdot 2^x + 2x \cdot 2^x \sqrt{2-x^2}, \\ 6x^2 + 3^{\sqrt{x+1}} - 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} < 9 - x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3x. \end{cases}$$

7. Розв'яжіть рівняння $25^x - (2a+1) \cdot 5^x + a^2 + a = 0$. У відповідь запишіть найменше ціле значення a , за якого рівняння має два корені.

8. Розв'яжіть рівняння $|x-5|^{\frac{x}{x-6}} = 1$. У відповідь запишіть найбільший корінь рівняння.

Рефлексія

1) Я сьогодні навчився/навчилась

2) Мені здалося цікавим

3) У мене залишилися запитання щодо







