

Урок 2. Означення показникової функції, її графік та властивості. Функція $y = e^x$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите властивості степенів з дійсним показником;
- 2) вивчите означення показникової функції та її властивості;
- 3) навчитеся будувати графіки показникових функцій;
- 4) з'ясуєте, що таке експонента;
- 5) дізнаєтесь про практичне застосування показникової функції;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. У геометричній прогресії $b_1 = 0,25$, $q = 2$. Знайдіть b_{10} і S_{10} .
2. Спростіть вираз $\frac{5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}}{5^{\sqrt{2}}}$.
3. Спростіть вираз $\frac{(a^{\sqrt{7}} + 1)(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}}}$.
4. Знайдіть область визначення функції:
 - 1) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-2x-8}$;
 - 2) $f(x) = \sqrt{16x-x^2}$.
5. Знайдіть область значень функції:
 - 1) $f(x) = 12 - 4x - x^2$;
 - 2) $f(x) = \cos x \operatorname{tg} x$.

III. Означення показникової функції

Виберемо деяке додатне число a , відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x . Таким чином задано функцію $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, з областю визначення $x \in \mathbb{R}$.

Означення. Функція $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$ називається **показниковою**.

Чому a не може бути менше 0 або дорівнювати 0, або дорівнювати 1?

Якщо $a = 0$, $x \leq 0$, то вираз ax невизначений, наприклад, 0^0 , 0^{-2} .

Якщо $a < 0$ і x – нескоротний дріб, знаменник якого парний, то вираз a^x невизначений. Наприклад, вирази $(-3)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(-3)^5}$, $(-5)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-5)^3}$ не є дійсними числами.

Теорема. Якщо $a > 1$ і $x > 0$, то $a^x > 1$. Якщо $0 < a < 1$ і $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $a > 1$ і $x > 0$. Оскільки $x > 0$, то існує раціональне число r , що $x > r > 0$. Розглянемо збіжну до числа x послідовність раціональних чисел (x_n) . З умови $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x > r$ випливає, що, починаючи з деякого номера n_0 , виконується нерівність $x_n > r$. Оскільки $a > 1$ і числа x_n і r є раціональними, то $a^{x_n} > a^r > 1$ для всіх $n \geq n_0$. Тоді маємо, що $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} \geq a^r > 1$. Наприклад, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 так, що $x_2 > x_1$, і функцію $f(x) = a^x$, де $a > 1$.

Запишемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1} (a^{x_2 - x_1} - 1)$.

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тоді: $a^{x_2 - x_1} > 1$.

Оскільки $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_1} (a^{x_2 - x_1} - 1) > 0$. Звідси $f(x_2) > f(x_1)$.

Отже, з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.

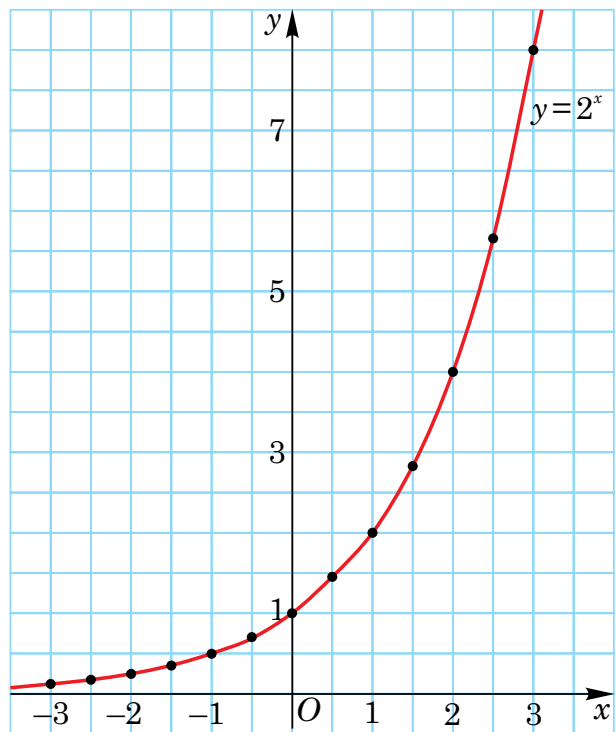
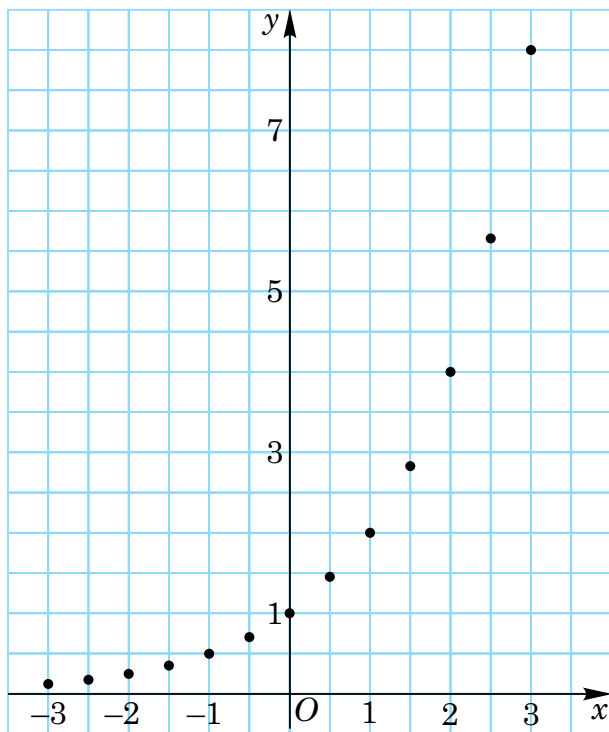
Це означає, що функція $f(x)$ є зростаючою.

Аналогічно можна показати, що при $0 < a < 1$ показникова функція є спадною.

IV. Графік показникової функції

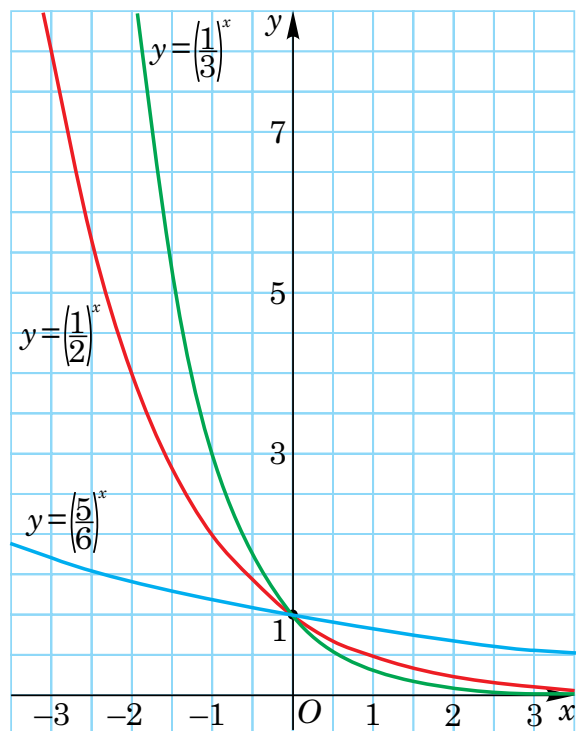
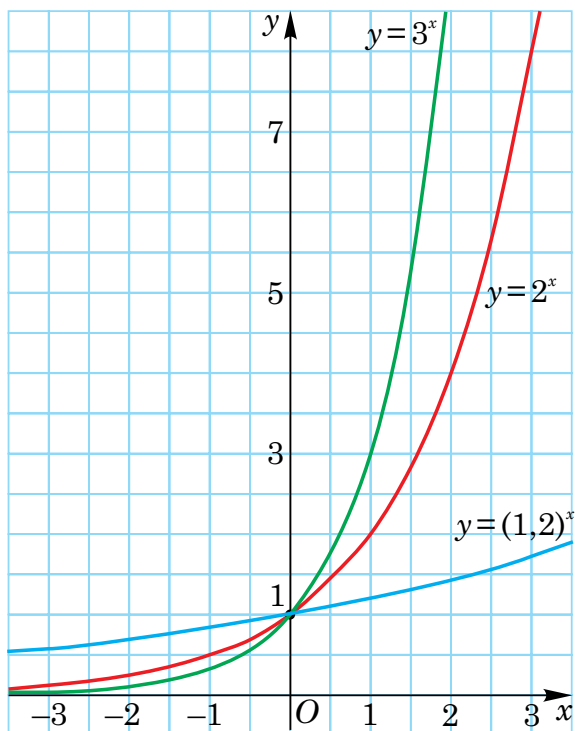
Оскільки $a > 0$, $a \neq 1$ $a^0 = 1$, то графік будь-якої показникової функції проходить через точку $(0; 1)$.

Побудуємо декілька точок графіка функції $y = 2^x$ для $-3 \leq x \leq 3$ з кроком 0,5:



Врахуємо, що областю визначення функції $y = 2^x$ є множина всіх дійсних чисел, то з'єднавши плавно отримані точки можна отримати ескіз графіка функції $y = 2^x$.

Наведемо приклади графіків показникової функції:



V. Властивості показникової функції

1. Область визначення функції $D(y) = R$.
2. Множина значень функції $E(y): y \in (0; +\infty)$. Тобто функція набуває лише додатних значень на всій області визначення.
3. Найбільшого та найменшого значень функції не існує.
4. Нулів функція не має, графік не перетинає вісь Ox .
5. Функція ні парна, ні непарна.
6. Якщо $a > 1$, то функція зростаюча. Якщо $0 < a < 1$, то функція спадна.

VI. Функція $y = e^x$ та практичне застосування показникової функції

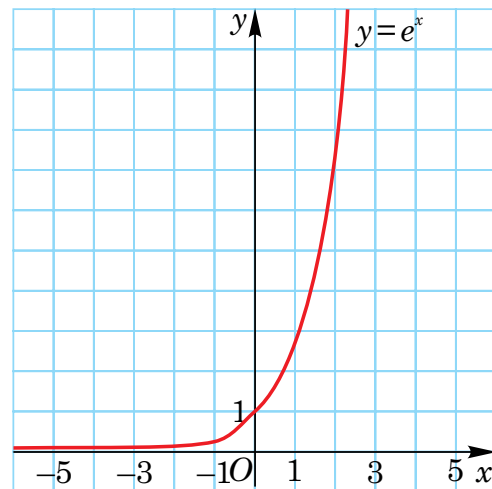
Число e — математична константа, що визначається як $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Число e (число Ойлера) належить множині ірраціональних чисел. Його наближене значення $e = 2,71828182\dots$. Для обчислень використовуємо наближене значення $e \approx 2,7$.

Означення. Функція вигляду $y = e^x$ називається **експонентою**.

Експонента є особливим випадком показникової функції $y = a^x$, якщо $a = e$. Тому експонента має всі властивості показникової функції.

Властивості функції $y = e^x$

1. Область визначення функції $y = e^x: x \in (-\infty; +\infty)$. Тобто показник степеня може бути будь-яким числом.
2. Область значень функції: $y \in (0; +\infty)$. Тобто значення степенів є лише додатні числа.
3. Нулів функція не має. Графік не перетинає вісь абсцис.
4. Функція ні парна, ні непарна. Графік не симетричний ні відносно осі Oy , ні відносно точки $(0; 0)$.
5. Функція зростаюча.



Історична довідка

Термін «показник» (нім. exponent, лат. exponere «виставляти на показ», exponens, exponentis «що виставляється на показ», «той, що показується») для степеня увів у 1553 р. німецький математик-ченець Міхаель Штифель (1487 – 1567 рр.). Він сформулював означення дробових і нульових показників степенів. Позначення a^x для натуральних показників увів Рене Декарт (у 1637 р.). Застосовувати степені з дробовими й від'ємними показниками розпочав Ісаак Ньютон (у 1676 році). Степені з довільними дійсними показниками, без будь-якого загального означення, використовували Готфрід Ляйбніц

та Йоганн Бернуллі. У 1679 році Ляйбніц увів поняття експоненціальної (тобто показникової) функції для залежності $y = a^x$ і побудував експоненціальну криву для графіка цієї функції. Через $\exp(x)$ позначається експонента, з показником $e = 2,718281828\dots$, яка є константою, що використовується в багатьох мовах програмування.

Показникові функції зустрічаються в найрізноманітніших галузях науки: у фізиці, в хімії, в біології, в економіці, в інформатиці, в медицині, в лісівництві, в картографії, у будівництві тощо (Т. Семененко, газета «Математика» №2, 2014 р.).

Практичне застосування показникової функції

1. Радіоактивний розпад.

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, де $m(t)$ — маса радіоактивної речовини в момент часу t , m_0 — початкова маса речовини, T — період піврозпаду (проміжок часу, за який початкова кількість речовини зменшується вдвічі).

2. Зміна атмосферного тиску залежно від висоти підйому.

$p(h) = p_0(0,3)^h$, де $p(h)$ — атмосферний тиск на висоті h , p_0 — атмосферний тиск на рівні моря, h — висота над рівнем моря.

3. Складні відсотки.

1) Формула складних відсотків у спрощеному вигляді: $A(n) = A_0(1+r)^n$.

2) Формула складних відсотків в ускладненому вигляді: $A(t) = A_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$.

Сума $A(t)$ (грн) залежить від часу t (в роках або місяцях), A_0 — основна сума накопичення складних відсотків (сума вкладу або інвестиції), за річною відсотковою ставкою r %.

Значення n — кількість періодів нарахування відсотків за рік або місяць.

При збільшенні n основа степеня природним чином наближається до числа e .

4. Розмноження бактерій.

$N(t) = N_0 a^{kt}$, де $N(t)$ — кількість бактерій розмножена за час t , N_0 — початкова кількість бактерій, t — час розмноження бактерій, числа k та a — деякі константи, для різних видів бактерій вони різні, а в «ідеальних» умовах $a \approx e$.

5. Збільшення товщини стовбура дерева.

$M = M_0 a^{kt}$, де M — кількість деревини у момент спостереження (у м³), M_0 — початкова кількість деревини (у м³), t — час (у роках), який відраховується з моменту, коли об'єм деревини був M_0 , число k — деяка константа, яка має певне значення для різних видів деревини.

6. Зростання народонаселення.

Зміна кількості людей у країні за деякий проміжок часу описується формулою: $N = N_0 e^{\alpha t}$, де N_0 — кількість людей при $t = 0$, N — кількість людей у момент часу t , α — деяка стала величина.

7. Тиск повітря.

Тиск повітря зменшується з висотою (при сталій температурі) за законом $p = p_0 e^{-\frac{h}{H}}$, де p_0 — тиск на рівні моря ($h = 0$), p — тиск на висоті h , H — деяка стала величина, яка залежить від температури. Для температури 20°C величина $H \approx 7,7$ км.

Цікаві факти

1. Якби усі посіяні макові зерна проростали, то через 5 років кількість «нащадків» однієї зернини дорівнювало б приблизно 2000 рослин маку на 1 м^2 суші.
2. Потомство кімнатної мухи тільки однієї самки за літо може становити $8 \cdot 10^{14}$ мушок. Маса такої кількості мух дорівнювала б декільком мільйонам тонн. За два роки пара мух дала б потомство, маса якого перевищила б масу земної кулі. І тільки наявність динамічної рівноваги, яка математично задається коефіцієнтами вповільнення росту, регулює цей процес.

Приклад 1. Якщо під час радіоактивного розпаду кількість речовини за добу зменшу-

ється вдвічі, то після x діб від маси M_0 залишається маса $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- 1) Скільки радіоактивної речовини залишиться через три доби?
- 2) Через скільки діб кількість речовини зменшиться у 128 разів?

Розв'язання. 1) $\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, за умовою. Оскільки $x = 3$, то $\frac{M}{M_0} = \frac{1}{8}$ і $M = \frac{1}{8} M_0$.

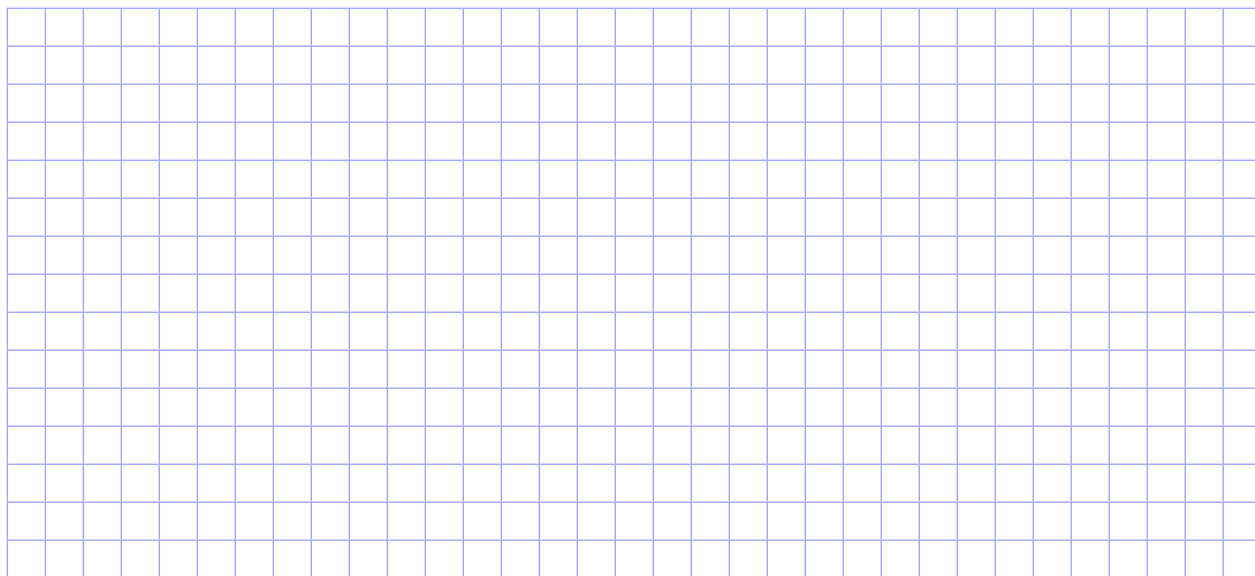
Тобто, через три доби кількість радіоактивної речовини зменшиться у 8 разів.

- 2) $\frac{M}{M_0} = \frac{1}{128}$, за умовою.

Отже, $\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^7$, звідси $x = 7$.

Відповідь. 1) $\frac{1}{8}$ від початкової; 2) через 7 діб.

Приклад 2. Опишіть властивості функції $y = \pi^{-x}$ та побудуйте ескіз її графіка.



IX. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Інвестор інвестував у стартап 100 000 грн терміном на два роки. Щомісяця вартість інвестиції зростає на 3 %, за формулою складних відсотків.

1. Складіть формулу, яка описує вартість інвестиції через n місяців.
2. Якою буде вартість інвестиції через рік?
3. Чи була б інвестиція вкладених грошей прибутковішою для інвестора, якби він вклав ці гроші в нерухомість, де інвестиція зростає щороку в ціні на 40%?

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Укажіть показникові функції:

- | | | | |
|------------------|------------------|----------------------------|--|
| 1) $y = 3^x$; | 2) $y = x^3$; | 3) $y = x^{\frac{5}{3}}$; | 4) $y = (\sqrt{3})^x$; |
| 5) $y = \pi^x$; | 6) $y = x^\pi$; | 7) $y = (\sqrt{x})^5$; | 8) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^x$. |

2. Знайдіть значення аргументу x , при якому функція $y = 2^x$ приймає задане значення:

- | | | | |
|--------|------------------|---------------------------|-----------------------------|
| 1) 16; | 2) $8\sqrt{2}$; | 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; | 4) $\frac{1}{32\sqrt{2}}$. |
|--------|------------------|---------------------------|-----------------------------|

3. Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які — спадними:

- | | | |
|--|---------------------------------------|---|
| 1) $y = 10^x$; | 2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; | 3) $y = 2^{-x}$; |
| 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; | 5) $y = 2^x \cdot 3^x$; | 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$. |

4. Схематично зобразіть графік показникової функції:

- | | | | |
|--------------------|----------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $y = (0,2)^x$; | 2) $y = 7^x$; | 3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; | 4) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$. |
|--------------------|----------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

5. Побудуйте графік функції $y = 3^x$. Як змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

6. Порівняйте числа m і n , якщо:

- | | | | |
|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|
| 1) $3,8^m < 3,8^n$; | 2) $0,7^m < 0,7^n$; | 3) $3^m < 3^n$; | 4) $0,9^m > 0,9^n$. |
|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|

7. Знайдіть область визначення функції:

- | | | | |
|------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1) $y = 5^{\frac{1}{x-1}}$; | 2) $y = 3^{\sqrt{x-5}}$; | 3) $y = (0,5)^{\frac{1}{2-3x}}$; | 4) $y = 7^{\sqrt{5-10x}}$. |
|------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|

8. Чи є правильним твердження:

- 1) найбільше значення функції $y = 0,2^x$ на проміжку $[-1; 2]$ дорівнює 5;
- 2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;
- 3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$?

9. Величина x змінюється з часом t за законом показникової функції. Відомо, що при $t = 0$ її значення дорівнювало 4, а при $t = 3$ дорівнює 32. Знайдіть значення величини при $t = 1$, $t = -1,4$, $t = \frac{3}{2}$.
10. За яких умов $3^{x_1} > 3^{x_2}$ і $0,7^{x_1} > 0,7^{x_2}$?

Рівень В

1. Знайдіть значення показникової функції $y = a^x$ при заданих значеннях x :
- 1) $y = 7^x$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0,5$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = 1$, $x_3 = -0,5$;
- 3) $y = (\sqrt{3})^x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$; 4) $y = \left(\frac{4}{9}\right)^x$, $x_1 = -1,5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2,5$.
2. Розташуйте числа $\left(\frac{1}{2}\right)^1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,5}$ у порядку зростання.
3. Знайдіть значення аргументу x , при якому функція $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ набуває значення:
- 1) $\frac{1}{25}$; 2) $\frac{1}{25\sqrt{5}}$; 3) 125; 4) $625\sqrt{5}$.
4. Схематично зобразіть графік показникової функції:
- 1) $y = (\sqrt{2})^x$; 2) $y = (\sqrt{7})^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^x$.
5. Порівняйте число a з одиницею, якщо:
- 1) $a^{\frac{3}{5}} > a^{\frac{4}{5}}$; 2) $a^{\frac{2}{3}} < a^{\frac{1}{9}}$; 3) $a^{0,2} > 1$; 4) $a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{4}}$.
6. Знайдіть область визначення функції:
- 1) $y = (\sqrt[3]{3 - \sqrt{5}})^{x+1}$; 2) $y = \sqrt{5^x - 6^x}$; 3) $y = (\sqrt{3})^{\frac{1}{x^2-1}}$; 4) $y = 2^{\sqrt{4-x^2}}$.
7. Дослідіть на парність функцію:
- 1) $y = 2^x + 2^{-x}$; 2) $y = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$; 3) $y = (2^x + 3^x)^2$; 4) $y = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$.
8. Спростіть вираз:
- 1) $(a^{\sqrt{3}} - 4)(a^{\sqrt{3}} + 4) - (a^{\sqrt{3}} - 3)^2$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{5}} - 49}{a^{2\sqrt{5}} - 7a^{\sqrt{5}}}$.
9. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 4^x, & x < 1, \\ -x^2 + 1, & x \geq 1. \end{cases}$
- 1) Обчисліть: $f(-3)$, $f(-2,5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
- 2) Побудуйте графік функції $y = f(x)$ та опишіть її властивості.

Рівень С

1. Розташуйте числа $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{0,1}$, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-0,5}$, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3,4}$ у порядку зростання.

- 2.** Якому з проміжків $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ належить x , якщо:
- 1) $3^x = 2,5$; 2) $(\sqrt{3})^x = 0,8$; 3) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 3$; 4) $\left(\frac{5}{7}\right)^x = \frac{4}{5}$.
- 3.** Схематично зобразіть графік показникової функції:
- 1) $y = (\sqrt{8} - \sqrt{2})^x$; 2) $y = (\sqrt{5} - \sqrt[3]{5})^x$; 3) $y = (\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{4})^x$; 4) $y = (\sqrt[5]{32,1} - \sqrt{3})^x$.
- 4.** Установіть графічно кількість коренів рівняння:
- 1) $2^x = x$; 2) $2^x = x^2$; 3) $2^x = \sin x$; 4) $2^{-x} = 2 - x^2$.
- 5.** Побудуйте графік функції:
- 1) $y = |2^{-|x|} - 1|$; 2) $y = \frac{2^{|x|} - 1}{|2^x - 1|}$.
- 6.** Знайдіть множину значень функції:
- 1) $y = 10^{-x^2}$; 2) $y = \frac{1}{1 - 2^{-x}}$; 3) $y = 2^{-x^2 + 4x + 5}$; 4) $y = \frac{|x|}{x} \cdot e^{x^2}$.
- 7.** Маса радіоактивної речовини при $t = 1$ с дорівнювала 5 г, а при $t = 4$ с дорівнює 2 г. У скільки разів змінюється маса речовини за одиницю часу? Яке значення маси речовини було при $t = 0$ с, $t = 3$ с, $t = 7\frac{1}{2}$ с?
- 8.** Додатною чи від'ємною є різниця:
- 1) $\pi^{\sqrt{3}} - (\sqrt{3})^\pi$, 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{2\sqrt{2}} - 1$?
- 9.** Задано функцію $y = \begin{cases} 4^x, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x < \pi, \\ x - \pi - 1, & x \geq \pi; \end{cases}$
- 1) Обчисліть: $f(-3)$, $f(-2,5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.
2) Побудуйте графік функції $y = f(x)$ та опишіть її властивості.
- 10.** Знайдіть область значень функції $y = \frac{2^x - 1}{2^x - 4}$.

Рефлексія

«Розумію — можу пояснити — застосовую».

- 1) Сьогодні я зрозумів(ла), що показникова функція
-
-
- 2) За графіком показникової функції можна визначити
-
-
- 3) Функція $y = e^x$ важлива тому, що
-
-

Можливі теми проєктів

1. Застосування показникової функції в банківських операціях.
2. Моделювання зростання бактерій.
3. Показникова функція та радіоактивний розпад ізотопів.
4. Показникові функції у затухаючих процесах фізики.
5. Порівняння показникової та лінійної моделі зростання.
6. Енергетичне споживання та показникове зростання.





