

Урок 3. Урок–практикум.

Перетворення степеневих виразів

План уроку

1. Обчислення значень показникових виразів із дійсними показниками.
2. Спрощення показникових виразів із дійсними показниками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

визначає необхідність і достатність набору даних проблемної ситуації та математичних фактів для її розв'язання [12 МАО 3.1.1–2 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на власний розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі як групову активність.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Що змінюється в обчисленнях виразу, коли показник степеня є ірраціональним числом?
- 2) Чи можна порівняти значення виразів 3π і 33 без калькулятора?
- 3) Як спрощення показникових виразів допомагає порівнювати значення складніших виразів?
- 4) Чи завжди спрощений вираз є зручнішим для обчислення?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Скоротіть дріб $\frac{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{n^2}}$.

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}}$.

2. Чи проходить графік функції $y = x^{0,75}$ через точку $M(16; 8)$?

Відповідь. Проходить.

3. Спростіть вираз $(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}) : 5^{\sqrt{2}}$.

Відповідь. 0,8.

4. Порівняйте числа:

1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{\sqrt{3}}$ і $\left(\frac{7}{4}\right)^{\sqrt{3}}$;

2) $(2,5)^{-\pi}$ і $(5,2)^{-\pi}$

Відповідь. 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{7}{4}\right)^{\sqrt{3}}$; $(2,5)^{-\pi} > (5,2)^{-\pi}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У лабораторії біотехнологій досліджується процес росту бактеріальної культури. Відомо, що маса культури змінюється за формулою $m(t) = 2e^{\frac{t}{2}}$, де $m(t)$ — маса культури (у грамах), а t — час у годинах від початку розмноження.

- 1) Визначте масу бактеріальної культури через 30 хвилин і 40 хвилин від початку експерименту.
- 2) Обчисліть масу культури через 1 год, 3 год та 6 год.
- 3) Поясніть, як зміна часу впливає на масу культури та чому цей процес не можна описати лінійною функцією.
- 4) Зробіть висновок про характер зростання маси культури на основі отриманих результатів.

III. Обчислення значень показникових виразів із дійсними показниками (5 хв)

Оскільки точне значення виразу, що містить дійсний показник степеня не завжди можна обчислити, то такі вирази здебільшого сконструйовані так, що при обчисленні їхніх значень можна використовувати властивості степенів із дійсними показниками.

Для $a > 0$ і $b > 0$ і для будь-яких дійсних чисел m і n :

- 1) $a^n a^m = a^{n+m}$;
- 2) $a^n : a^m = a^{n-m}$;
- 3) $(a^n)^m = a^{nm}$;
- 4) $(ab)^n = a^n b^n$;
- 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

5. Обчисліть $\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. $\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3$.

Відповідь. 3.

6. Обчисліть $27^{\sqrt{3}} : 3^{3\sqrt{3}}$.

Розв'язання. $27^{\sqrt{3}} : 3^{3\sqrt{3}} = \left(3^3\right)^{\sqrt{3}} : 3^{3\sqrt{3}} = 3^{3\sqrt{3}} : 3^{3\sqrt{3}} = 1$.

Відповідь. 1.

7. Обчисліть $6^{\sqrt{5}} \cdot 6^{3-\sqrt{5}} - 5^{3+\sqrt{5}} : 5^{\sqrt{5}} + \left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Скористаємося властивостями 1, 2 і 3:

$$6^{\sqrt{5}} \cdot 6^{3-\sqrt{5}} - 5^{3+\sqrt{5}} : 5^{\sqrt{5}} + \left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 6^{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}} - 5^{3+\sqrt{5}-\sqrt{5}} + 2^3 = 6^3 - 5^3 + 2^3 = 216 - 125 + 8 = 99.$$

Відповідь. 99.

IV. Спрощення показникових виразів із дійсними показниками

Оскільки для степенів із довільними дійсними показниками виконуються ті самі властивості, що і для степенів із раціональними показниками, то при перетворенні виразів із ірраціональними показниками потрібно використовувати прийоми, аналогічні тим, що використовувалися, а саме: винесення спільного множника за дужки, використання тотожностей скороченого множення, метод групування тощо.

Ілюстративні приклади (5 хв)

8. Спростіть вираз $\frac{(a^{2\sqrt{6}} - 1)(a^{\sqrt{6}} + a^{2\sqrt{6}} + a^{3\sqrt{6}})}{a^{4\sqrt{6}} - a^{\sqrt{6}}}.$

Розв'язання.
$$\frac{(a^{2\sqrt{6}} - 1)(a^{\sqrt{6}} + a^{2\sqrt{6}} + a^{3\sqrt{6}})}{a^{4\sqrt{6}} - a^{\sqrt{6}}} = \frac{\left((a^{\sqrt{6}})^2 - 1\right)\left(a^{\sqrt{6}} + (a^{\sqrt{6}})^2 + (a^{\sqrt{6}})^3\right)}{(a^{\sqrt{6}})^4 - a^{\sqrt{6}}} =$$
$$= \frac{(a^{\sqrt{6}} - 1)(a^{\sqrt{6}} + 1)a^{\sqrt{6}}\left(1 + a^{\sqrt{6}} + (a^{\sqrt{6}})^2\right)}{a^{\sqrt{6}}\left((a^{\sqrt{6}})^3 - 1\right)} = \frac{(a^{\sqrt{6}} - 1)(a^{\sqrt{6}} + 1)\left(1 + a^{\sqrt{6}} + (a^{\sqrt{6}})^2\right)}{(a^{\sqrt{6}} - 1)\left((a^{\sqrt{6}})^2 + a^{\sqrt{6}} + 1\right)} = a^{\sqrt{6}} + 1.$$

Відповідь. $a^{\sqrt{6}} + 1.$

9. Спростіть вираз $(x^\pi + y^\pi)^2 - \left(\left(4^{\frac{1}{\pi}}x^2y^2\right)^\pi\right)^{0,5}.$

Розв'язання.
$$(x^\pi + y^\pi)^2 - \left(\left(4^{\frac{1}{\pi}}x^2y^2\right)^\pi\right)^{0,5} = (x^\pi)^2 + 2x^\pi y^\pi + (y^\pi)^2 - \left(2^{\frac{2}{\pi}}x^2y^2\right)^{0,5\pi} =$$
$$= x^{2\pi} + y^{2\pi} = x^{2\pi} + 2x^\pi y^\pi + y^{2\pi} - 2x^\pi y^\pi = .$$

Відповідь. $x^{2\pi} + y^{2\pi}.$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У лабораторії біотехнологій досліджується процес росту бактеріальної культури. Відомо, що маса культури змінюється за формулою $m(t) = 2e^{\frac{t}{2}}$, де $m(t)$ — маса культури (у грамах), а t — час у годинах від початку розмноження.

- 1) Визначте масу бактеріальної культури через 30 хвилин і 40 хвилин від початку експерименту.
- 2) Обчисліть масу культури через 1 год, 3 год та 6 год.
- 3) Поясніть, як зміна часу впливає на масу культури та чому цей процес не можна описати лінійною функцією.
- 4) Зробіть висновок про характер зростання маси культури на основі отриманих результатів.

Розв'язання. 1) Переведемо хвилини в години:

$$30 \text{ хв} = 0,5 \text{ год};$$

$$40 \text{ хв} = 2/3 \text{ год} \approx 0,67 \text{ год}.$$

$$\text{Через } 30 \text{ хв: } m(0,5) = 2 \cdot e^{0,25} \approx 2 \cdot 1,284 = 2,57 \text{ (г)}.$$

$$\text{Через } 40 \text{ хв: } m(0,67) = 2 \cdot e^{0,335} \approx 2 \cdot 1,398 = 2,8 \text{ (г)}.$$

2) Маса культури через 1 год, 3 год та 6 год.

$$\text{Через } 1 \text{ год: } m(1) = 2 \cdot e^{0,5} \approx 2 \cdot 1,649 = 3,3 \text{ (г)}.$$

$$\text{Через } 3 \text{ год: } m(3) = 2 \cdot e^{1,5} \approx 2 \cdot 4,482 = 8,96 \text{ (г)}.$$

$$\text{Через } 6 \text{ год: } m(6) = 2 \cdot e^3 \approx 2 \cdot 20,086 = 40,17 \text{ (г)}.$$

3) Зі збільшенням часу маса культури зростає дедалі швидше. За рівні проміжки часу приріст маси не є сталим, а постійно збільшується. Саме тому цей процес не можна описати лінійною функцією, для якої характерний однаковий приріст за рівні проміжки часу.

4) Швидкість росту бактеріальної культури пропорційна вже наявній масі, тому з часом процес стає дедалі інтенсивнішим. Отже, масу бактеріальної культури можна описати показниковою функцією.

Відповідь. 2,57 г; 2,8 г; 3,3 г; 8,96 г; 40,17 г.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

$$1) 8^{\sqrt{5}} \cdot 8^{-\sqrt{5}}; \quad 2) \left((0,5)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}; \quad 3) 3^{2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}}; \quad 4) 2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}};$$

2. Обчисліть за допомогою калькулятора:

$$1) (\sqrt{2})^{\sqrt{3}}; \quad 2) \pi^{\sqrt{5}}; \quad 3) (\sqrt{2}-1)^{\pi}; \quad 4) (3\sqrt{2})^{\pi}.$$

3. Подайте у вигляді степеня з основою 3 число:

$$1) 9^{\sqrt{2}}; \quad 2) 81^{-1}; \quad 3) \sqrt[3]{9}; \quad 4) 27^{\pi}.$$

4. Порівняйте з одиницею число:

$$1) 2^{-\sqrt{5}}; \quad 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}; \quad 3) 0,3^2; \quad 4) 1,7^3;$$
$$5) \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}; \quad 6) \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}; \quad 7) (\sqrt{2})^3; \quad 8) \left(\frac{\pi}{2}\right)^e.$$

5. Подайте у вигляді степеня числовий вираз:

$$1) \frac{\sqrt[4]{27}}{9}; \quad 2) \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}; \quad 3) \sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}};$$
$$4) \sqrt[3]{\left(\frac{1}{25}\right)^5}; \quad 5) \sqrt[3]{\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4}}; \quad 6) \frac{3\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}.$$

6. Подайте у вигляді степеня числовий вираз:

$$\begin{array}{lll}
 1) 343^{-\frac{2}{3}}; & 2) \left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}} \cdot 243^{-0,4}; & 3) 8^{\frac{1}{3}} : 81^{0,75}; \\
 4) \left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}; & 5) 8^{\frac{1}{2}} : \left(8^{\frac{1}{6}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}\right); & 6) \left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5} \cdot \left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}.
 \end{array}$$

7. Подайте у вигляді степеня числовий вираз:

$$\begin{array}{lll}
 1) 8^{\sqrt{5}} \cdot 8^{-\sqrt{5}}; & 2) \left((0,5)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}; & 3) \left(5^{1+\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}; \\
 4) 3^{2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}}; & 5) 2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}; & 6) \left(5^{2-\sqrt{5}}\right)^{2+\sqrt{5}} - (\sqrt{5})^0.
 \end{array}$$

8. Обчисліть:

$$1) 4^{3,5} : 4^3; \quad 2) 8^{\frac{2}{3}} : 8^2; \quad 3) \left(\frac{1}{2}\right)^{-6,3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2,3}; \quad 4) \left(\frac{2}{3}\right)^{2,4} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-0,6}.$$

Рівень В

1. Обчисліть:

$$\begin{array}{ll}
 1) 8^{\frac{2}{3}} : 81^{0,75}; & 2) \left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5} \cdot \left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}; \\
 3) \left(5^{1+\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}; & 4) \left(5^{2-\sqrt{5}}\right)^{2+\sqrt{5}} - (\sqrt{5})^0.
 \end{array}$$

2. Обчисліть:

$$1) 2^{1-2\sqrt{7}} \cdot 4^{\sqrt{7}+1}; \quad 2) 3^{(\sqrt{5}+1)^2} : 3^{2\sqrt{5}+4}; \quad 3) 9^{\sqrt{5}-1} \cdot 3^{3-2\sqrt{5}}; \quad 4) 4^{(1-\sqrt{7})^2} : 4^{6-2\sqrt{7}}.$$

3. Подайте число у вигляді степеня:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt[4]{27}; & 2) \frac{8}{125}; & 3) \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}; \\
 4) \sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^5}; & 5) 3\sqrt[3]{9}; & 6) \sqrt[3]{\frac{4}{9}};
 \end{array}$$

4. Обчисліть значення виразу:

$$1) 243^{0,4}; \quad 2) (27^3)^{\frac{2}{9}}; \quad 3) \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{2}{9}}; \quad 4) 8^{\frac{2}{3}} : 81^{0,75}.$$

5. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll}
 1) \left(2^{\sqrt{2}-1} + 2^{\sqrt{2}+1}\right) : 2^{\sqrt{2}}; & 2) (3^{\pi} + 3^{\pi-2}) : 3^{\pi}. \\
 3) \left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} - 8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}}; & 4) 9^{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}-1} - 9^{\pi} : 9^{\pi-1}.
 \end{array}$$

6. Спростіть вираз:

$$1) 25^{\cos^2 \frac{\pi}{6}} : 25^{\sin^2 \frac{\pi}{6}} - 0,09 \cdot 0,09^{\cos^2 \pi}; \quad 2) 64 : 64^{\cos 120^\circ} - 13^{\cos^2 \frac{\pi}{13} \cdot 13^{\sin^2 \frac{\pi}{13}}}.$$

7. Спростіть вираз:

$$1) \left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right) \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right);$$

$$2) (a - 8) : \left(a^{\frac{1}{3}} - 2\right);$$

$$3) \left(n^{\frac{1}{3}} + 2\right) \left(n^{\frac{2}{3}} - 2n^{\frac{1}{3}} + 4\right);$$

$$4) (1 - x) : \left(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right).$$

8. Спростіть вираз:

$$1) 25^{\cos^2 \frac{\pi}{6}} : 25^{\sin^2 \frac{\pi}{6}} - 0,09 \cdot 0,09^{\cos \frac{2\pi}{3}};$$

$$2) 64 : 64^{\cos 120^\circ} - 13^{\cos^2 \frac{\pi}{13}} \cdot 13^{\sin^2 \frac{\pi}{13}}.$$

Рівень С

1. За властивостями показникової функції визначте знак виразу:

$$1) 4^{0,7} - 8^{0,4};$$

$$2) 0,25^{1,1} - 32^{-0,92};$$

$$3) 2^{1,1} - 3^{-0,1} - 0,5^{-0,9} + 1;$$

$$4) \sqrt{27} - 3 \cdot 9^{0,3} - 3^{-0,001}.$$

2. Подайте у вигляді степеня:

$$1) \frac{a^{\frac{1}{2}} a^{0,5}}{a^{\frac{2}{3}}}; \quad 2) \frac{x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}};$$

$$3) (y^{2,5})^2 (\sqrt[5]{y})^{-1}; \quad 4) \sqrt[7]{y^2} \left(y^{-\frac{3}{14}}\right)^2.$$

3. Подайте у вигляді степеня:

$$1) x^{-2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1};$$

$$2) \left(\frac{a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{8}+1} \cdot \frac{a^{-1-\sqrt{3}}}{a^{-2}}.$$

4. Спростіть вираз:

$$1) b^{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot b^{2\sqrt{3}}; \quad 2) a^e \cdot \sqrt[3]{a^3 : a^{3e}};$$

$$3) (b^{\sqrt[3]{9}})^{\sqrt[3]{3}}; \quad 4) (a^3 b)^{\sqrt{3}} : a^{\sqrt{27}} \cdot b^{1-\sqrt{3}}.$$

5. Спростіть вираз:

$$1) \frac{(x^{2\sqrt{3}} - 1)(x^{2\sqrt{3}} + x^{\sqrt{3}} + x^{3\sqrt{3}})}{x^{4\sqrt{3}} - x^{\sqrt{3}}};$$

$$2) \frac{a-1}{a^{0,75} + a^{0,5}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} + 1};$$

$$3) (x^\pi + y^\pi)^2 - \left(\left(4^{\frac{1}{\pi}} x^2 y^2\right)^\pi\right)^{0,5};$$

$$4) \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} - \frac{ab}{a + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right).$$

6. Спростіть вираз:

$$1) \frac{c-1}{c+\sqrt{c}+1} : \frac{c^{0,5}+1}{c^{1,5}-1} + 2c^{\frac{1}{2}};$$

$$2) \frac{2(x^{0,25} - y^{0,25})}{x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}}} - x - y;$$

$$3) \frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{\pi}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{\pi}{4}} + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{\pi}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{\pi}{2}}};$$

$$4) \frac{-b}{a + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}.$$

7. Спростіть вираз:

$$1) 2^{\sin^2 \frac{\pi}{6}} \cdot 2^{\cos^2 \frac{\pi}{6}} + \left(3^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}}\right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}};$$

$$2) \left(4^{2\sin \frac{\pi}{12}}\right)^{\cos \frac{\pi}{12}} + \left(0,9^{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}\right)^{\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}}.$$

8. Відомо, що функція $y = x^{\sqrt{2}}$ при $x = c$ має значення m . Чому дорівнює значення цієї функції при: 1) $x = 2c$; 2) $x = c^{-2}$?

VII. Рефлексія (2 хв)

Напишіть закінчення речення.

Сьогодні я вивчив/вивчила

Найскладнішим для мене було

Тепер я можу

Можливі теми проєктів

1. Розрахунок складних відсотків за допомогою показникових виразів.
2. Порівняння значень виразів із дійсними показниками без калькулятора.
3. Використання систем комп'ютерної математики для обчислення та спрощення показникових виразів.

Список використаних джерел

1) Алгебра (Алгебра і початки аналізу): підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Освіта, 2011. — 400 с.