

Урок 4. Побудова графіків показникових функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

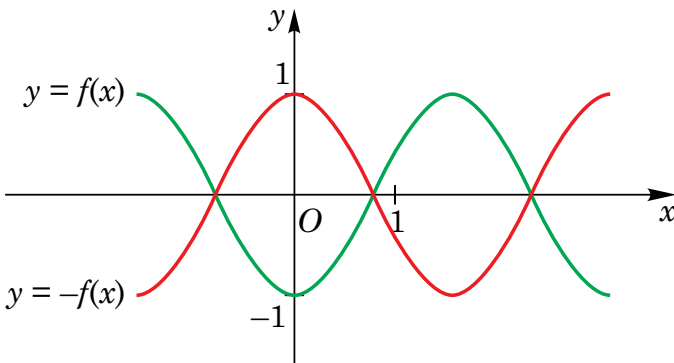
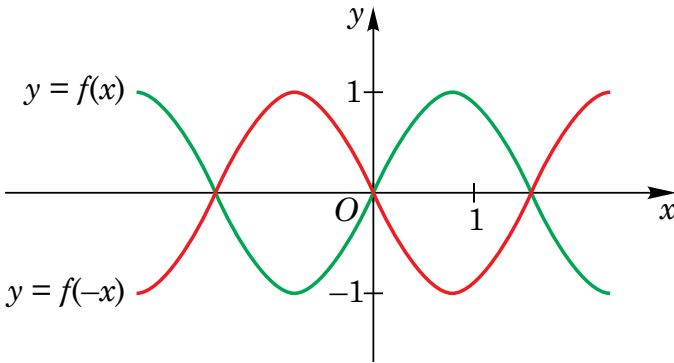
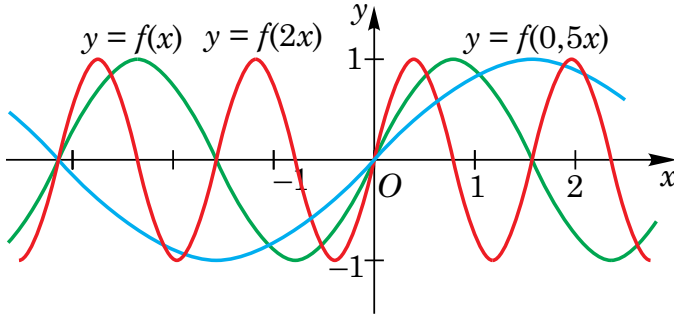
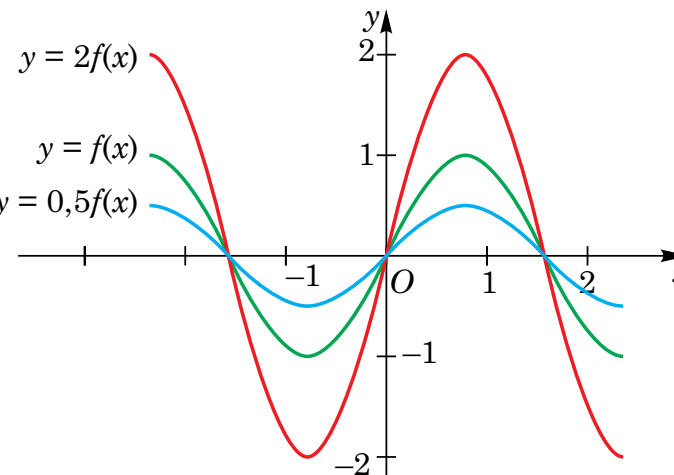
- 1) навчитеся будувати графіки показникових функцій, використовуючи геометричні перетворення;
- 2) зрозумієте графічний метод розв'язування показникових рівнянь;
- 3) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

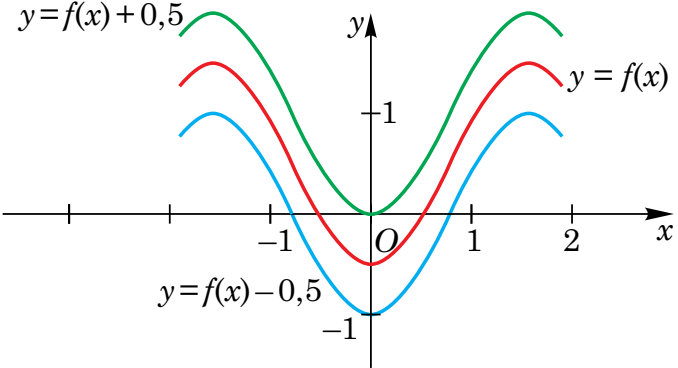
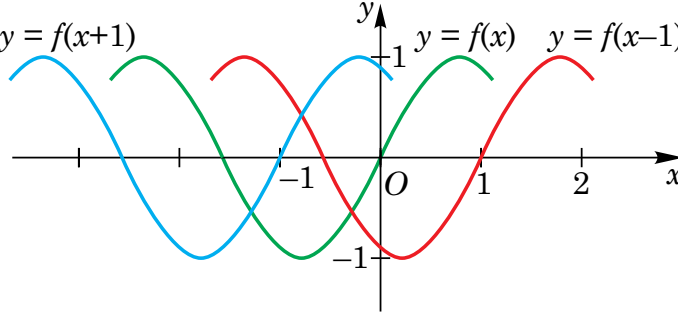
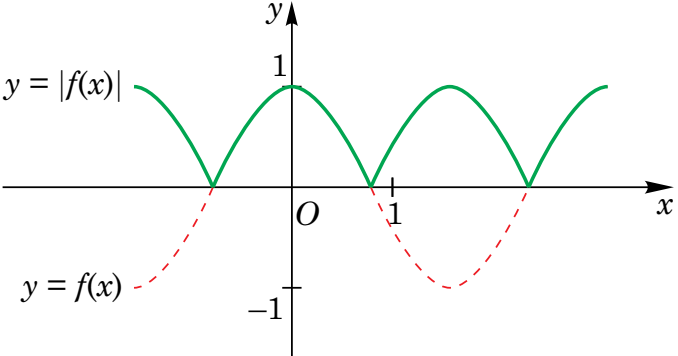
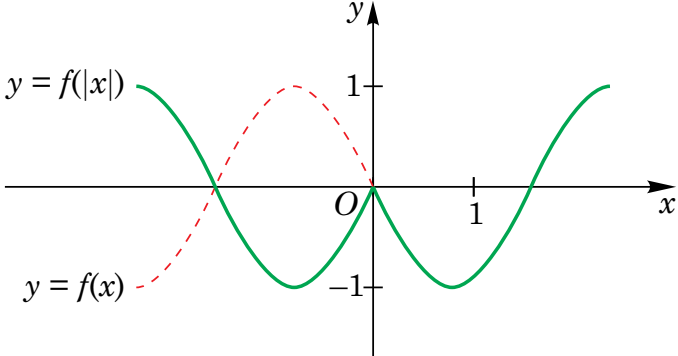
II. Повторення

1. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{2}{x^3}$.
2. Скільки критичних точок має функція $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2 - 4x + 1$ на проміжку $[-5; 0]$?
3. Яка з функцій спадає на всій своїй області визначення:
1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = x^4$; 3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 4) $y = 4^x$?
4. Скоротіть дріб $\frac{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{n^2}}$.

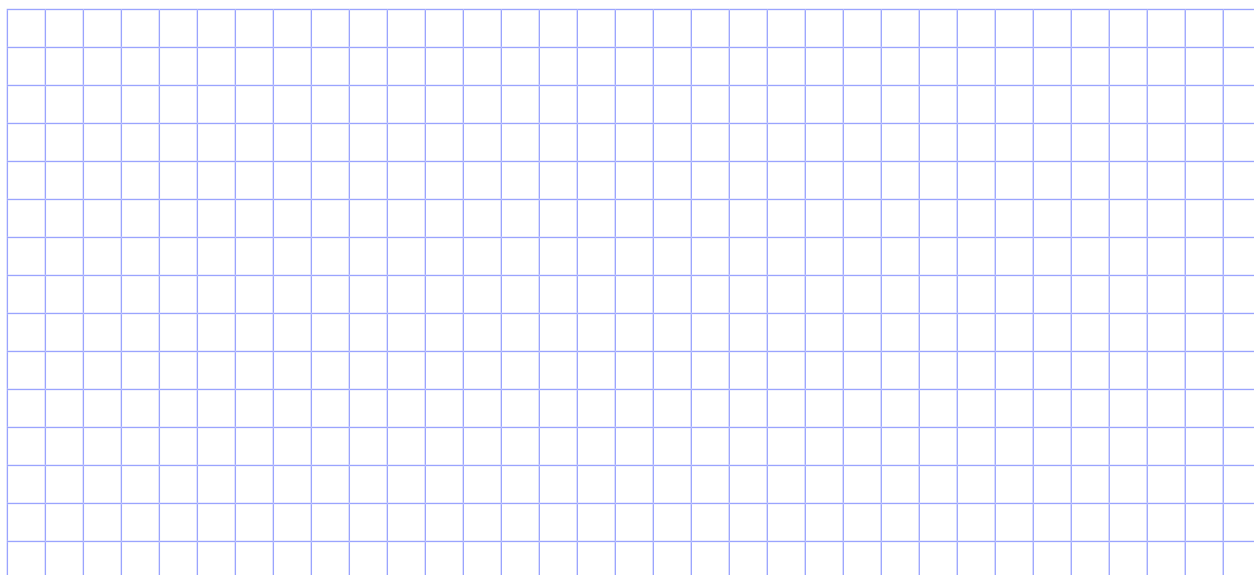
III. Побудова графіків показникових функцій за геометричними перетвореннями графіка показникової функції $y = a^x$

Повторимо основні перетворення графіка функції $y = f(x)$.

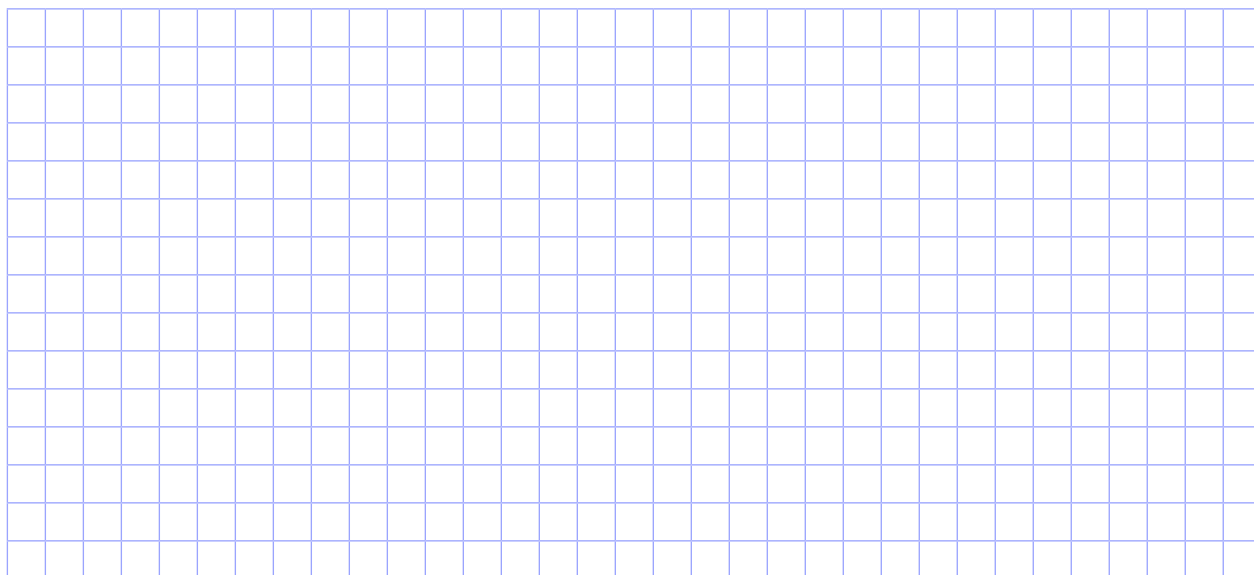
$y = -f(x)$	Симетричне відображення графіка відносно осі абсцис.	
$y = f(-x)$	Симетричне відображення графіка відносно осі ординат.	
$y = f(kx), k > 1$	Стиск графіка до осі ординат у k разів. Відстані від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат зменшуються у k разів.	
$y = f(kx), 0 < k < 1$	Розтяг графіка від осі ординат у $\frac{1}{k}$ разів. Відстані від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат збільшуються в $\frac{1}{k}$ разів.	
$y = mf(x), m > 1$	Розтяг графіка від осі абсцис в m разів. Відстані від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис збільшуються в m разів.	
$y = mf(x), 0 < m < 1$	Стиск графіка до осі абсцис у $\frac{1}{m}$ разів. Відстані від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис зменшуються в $\frac{1}{m}$ разів.	

$y = f(x) + a$	Паралельне перенесення графіка вздовж осі ординат на a одиниць: • у додатному напрямку, якщо $a > 0$; • у від'ємному напрямку, якщо $a < 0$.	
$y = f(x + b)$	Паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис на b одиниць: • у додатному напрямку, якщо $b < 0$; • у від'ємному напрямку, якщо $b > 0$.	
$y = f(x) $	Частину графіка, яка лежить над віссю абсцис, залишаємо без змін. Ту частину, яка лежить під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно осі абсцис.	
$y = f(x)$	Частину графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$, залишаємо без змін. Потім її ж симетрично відображаємо відносно осі ординат. Графік функції є об'єднанням двох кривих: $y = f(x)$, $x \geq 0$ і $y = f(-x)$, $x \leq 0$.	

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x$.



Приклад 2. Побудуйте графік функції $y = 4 \cdot 5^{|x|}$.

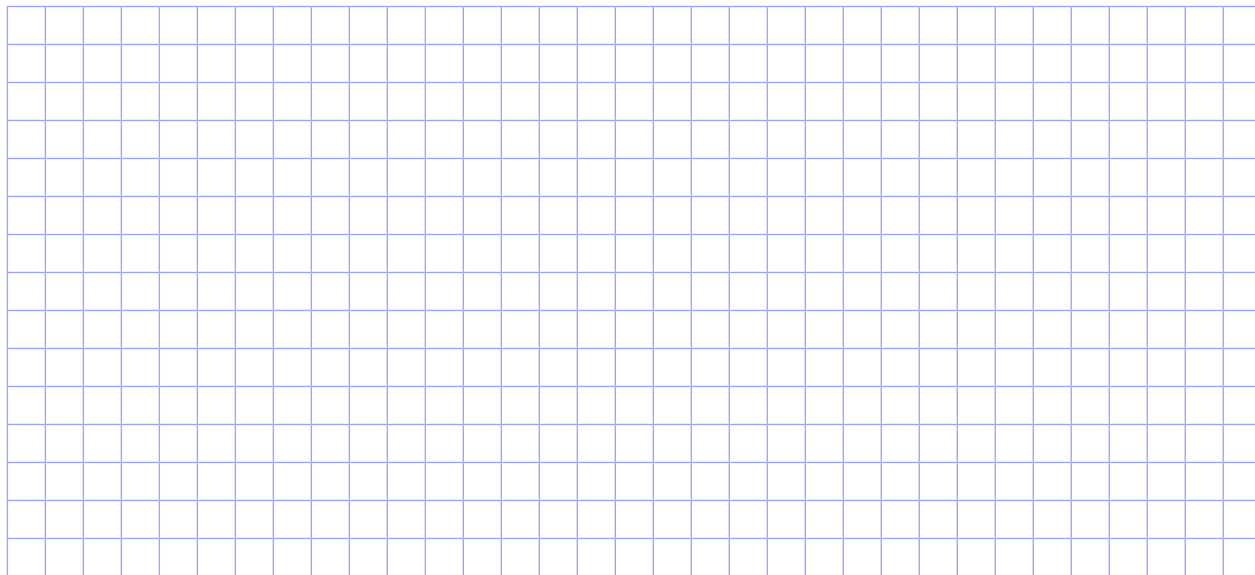


IV. Графічний метод розв'язування показникових рівнянь

Графічний метод розв'язування показникових рівнянь, як і графічний метод розв'язування будь-яких інших рівнянь виду $f(x) = g(x)$, полягає у побудові в одній системі координат графіків функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$ і знаходженні абсцис точок перетину графіків.

При розв'язуванні рівнянь графічним методом важливо виконувати перевірку знайдених коренів.

Приклад 3. Розв'яжіть графічно рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = x^2 + 1$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У 2020 році загальний обсяг цифрової інформації у світі становив приблизно 44 зетабайти. За оцінками фахівців, обсяг інформації подвоюється кожні 2 роки.

I змінюється за законом $I(t) = I_0 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$, де I_0 — початковий обсяг інформації, t — проміжок часу, за який оцінюється обсяг інформації.

1. Складіть формулу для обчислення обсягу інформації $I(t)$ (в зетабайтах), що буде доступна через t років після 2020-го.
2. Обчисліть обсяг інформації у світі через 10 років після 2020 року.
3. Побудуйте графік функції $I(t)$ на проміжку від 0 до 10 років.
4. За графіком функції оцініть, у якому році інформації стане в 16 разів більше, ніж було в 2020 році.
5. З'ясуйте, що таке зетабайт.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Побудуйте графік функції:
1) $y = 2^x + 1$; 2) $y = 3^x - 1$; 3) $y = 5^x + 1$; 4) $y = (0,5)^x - 2$.
2. Побудуйте графік функції та укажіть множину її значень:
1) $y = 5^x$; 2) $y = 0,5^{|x|}$; 3) $y = 3 - 0,4^x$; 4) $y = 3^{|x|}$.
3. На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше — $\frac{1}{9}$?

4. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = -8^x$; 2) $y = 8^x - 5$; 3) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x + 6$; 4) $y = 8^{|x|}$.

5. Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2 - x^2$; 2) $3^x = \cos x$.

6. При якому значенні a графік функції $y = a^x$ проходить через задану точку:

1) $A(1; 7)$; 2) $C(2; 9)$; 3) $B\left(1; \frac{1}{3}\right)$; 4) $D\left(2; \frac{4}{25}\right)$?

7. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:

1) $y = 3^{x-1} + 8$, $[-3; 1]$; 2) $y = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 4$, $[-1; 2]$;
3) $y = 7^{x-2} + 9$, $[0; 2]$; 4) $y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 13$, $[-2; 3]$.

8. Період напіврозпаду деякого ізотопу плутонію дорівнює 140 діб. Визначте масу плутонію, який залишиться через 8 років, якщо його початкова маса дорівнює 6 г.

Рівень В

1. Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = |3^x - 2|$; 2) $y = 3^{|x|} - 1$; 3) $y = 3^{|x+1|} - 1$;
4) $y = |3^x - 1|$; 5) $y = |1 - 3^{|x|}|$; 6) $y = \frac{|1 - 3^{-x}|}{3^{|x|} - 1}$.

3. Побудуйте графік функції на опишіть її основні властивості:

1) $y = 3 - (0,5)^x$; 2) $y = 0,5 \cdot 3^{x+2} - 2$; 3) $y = 2^{2x-2}$; 4) $y = 3^{0,5x+1} - 5$.

4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x + \frac{3}{4}$; 2) $y = 5^x - \frac{3}{2}$; 3) $y = (0,4)^x - \frac{1}{3}$; 4) $y = (0,6)^x + \frac{5}{6}$.

6. Знайдіть множину значень функції $f(x) = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$.

7. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 5^{\sin x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}$; 3) $y = 1 + 2^{|\sin x|}$; 4) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-|\cos x|} - 1$.

8. Розв'яжіть рівняння графічно:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -\frac{2}{x}$; 2) $2^{-x} = x + 6$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 4 - x$; 4) $2^x = \frac{8}{x}$.

9. Побудуйте графік функції:

$$1) y = |2^x - 1|; \quad 2) y = |3^x - 2|; \quad 3) y = |1 - (0,5)^x|; \quad 4) y = \left| \left(\frac{3}{4} \right)^{x-1} - 2 \right|.$$

10. За 10 років населення країни збільшилось на 10 %. У скільки разів воно збільшиться за наступні 20 років? Скористайтесь формулою $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$, де N_0 — кількість населення країни в початковий момент $t = 0$. Розв'язання проведіть графічним методом.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2^{\cos x} = x^2 + 2; \quad 2) 2^{\sqrt{x}} = \cos x.$$

2. Дослідіть функцію на парність:

$$1) y = 4 \cdot 2^{-x} + 2^{x+2}; \quad 2) y = 3^{x-1} + 3^{1-x}; \quad 3) y = 2 \cdot 2^{3-|x|}; \quad 4) y = 10^{2x} - 0,01^x.$$

3. Побудуйте графік функції на опишіть її основні властивості:

$$1) y = 0,3^{|x|-2}; \quad 2) y = |4 - 2^x| - 1; \quad 3) y = 3^{|x+2|} - 3; \quad 4) y = 0,5 \cdot |1 - 3^{-x}|.$$

4. Побудуйте графік функції на опишіть її основні властивості:

$$1) y = 2^{|x-2|+|x+1|} - 1; \quad 2) y = 2 - 0,5^{|x+3|-2|x|-x}; \quad 3) y = 5 - 2 \cdot 3^{|0,5x-2|}; \quad 4) y = 3 - |0,5^{2x-4} - 4|.$$

5. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) 2^{-x} = 2x + 4; \quad 2) 0,5^{x-1} - 3 = 5 \cdot 5^x; \quad 3) 2^x - 2x = 1 - x^2; \quad 4) 2^x + 3^{x+1} - 1,5 = 0.$$

6. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$1) f(x) = |2^{x-1} - 4|, [2; 6]; \quad 2) f(x) = |4 - 0,5^{|x|}|, [-3; 1].$$

7. Укажіть множину значень функції:

$$1) f(x) = 3^{1-x^2}; \quad 2) f(x) = 0,3^{|x|} + 1; \quad 3) f(x) = 0,5^{x^2-4x+5}; \quad 4) f(x) = 5^{-|x-1|}.$$

8. Побудуйте графік функції:

$$1) y = |2 \cdot 3^x - 1|; \quad 2) y = |4^{x-1} - 2|; \quad 3) y = \left| 3^{x-2} - \frac{1}{2} \right|; \quad 4) y = \left| \left(\frac{1}{3} \right)^x - \frac{1}{3} \right|.$$

9. У фізичній лабораторії проводять експерименти над двома різновидами радіоактивної речовини. Кількість першої речовини становить 5 г з періодом її напіврозпаду 3 роки. Кількість другої речовини становить 3 г. Який період напіврозпаду другої речовини, якщо через 12 років їхні кількості зрівняються? Розв'яжіть графічним методом.

Рефлексія

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

- 1.** Зростання кількості інформації у світі як приклад експоненціального росту.
- 2.** Зв'язок інфляційних процесів в економіці та показникової функції.
- 3.** Використання показникової функції в машинному навчанні.
- 4.** Експоненціальне зростання населення.
- 5.** Поширення вірусів та графіки показникових функцій.







