

Урок 4. Побудова графіків показникових функцій

План уроку

1. Побудова графіків показникових функцій $y = a^x$ за геометричними перетвореннями.
2. Графічний метод розв'язування показникових рівнянь.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Історичні відомості подавайте в рамках часових можливостей.

7) Заплануйте розв'язання практичної задачі як групову активність. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

8) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Створення проектів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

10) Можливі теми для створення проектів запропоновані. Також темами проектів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

11) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому показникова функція є важливою при моделюванні реальних процесів?

2) Чи відомий вам термін «експонентний ріст»? Що він означає?

3) Чи доводилося вам бачити графіки зростання кількості хворих під час пандемії? На що вони схожі?

4) Щоби ви обрали: 100 000 грн одразу чи 1 копійку, яка подвоюється щодня впродовж місяця?

5) Чому навіть невисокий відсоток інфляції впливає на купівельну спроможність?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{2}{x^3}$.

Відповідь. $-\frac{6}{x^4}$.

2. Скільки критичних точок має функція $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2 - 4x + 1$ на проміжку $[-5; 0]$?

Відповідь. Одну.

3. Яка з функцій спадає на всій своїй області визначення:

1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = x^4$; 3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 4) $y = 4^x$?

Відповідь. 3).

4. Скоротіть дріб $\frac{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{n^2}}$.

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}}$.

Як я вирішую певну проблему?

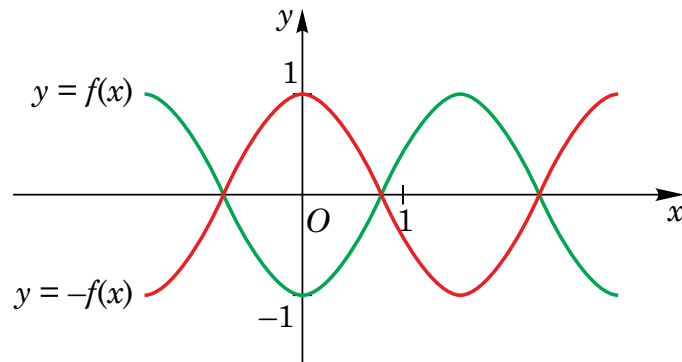
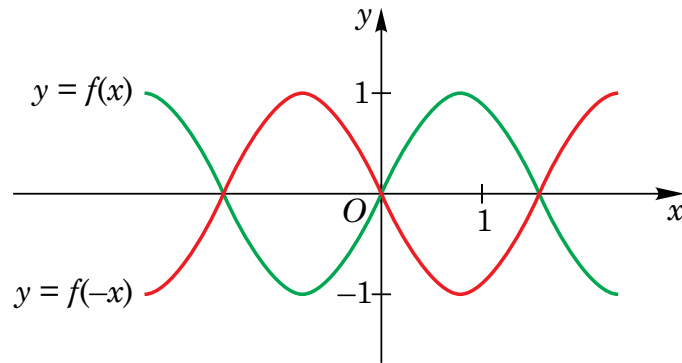
Задача. У 2020 році загальний обсяг цифрової інформації у світі становив приблизно 44 зетабайти. За оцінками фахівців, обсяг інформації подвоюється кожні 2 роки.

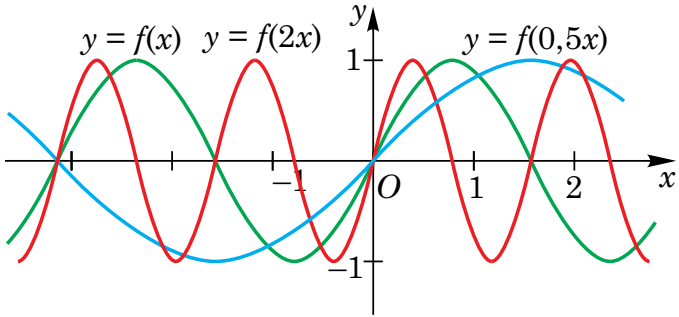
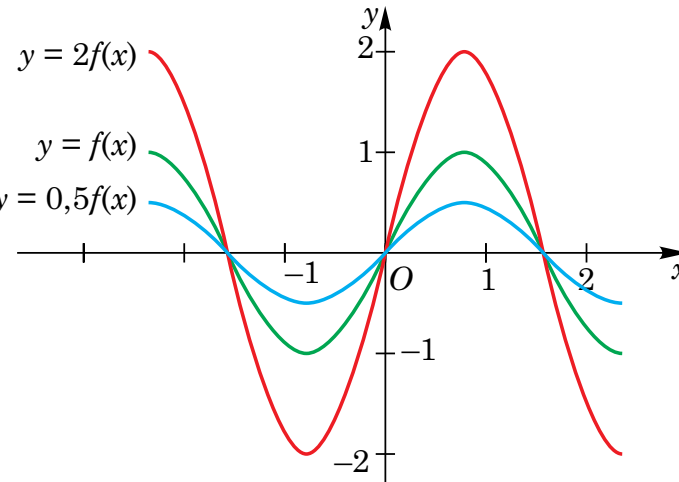
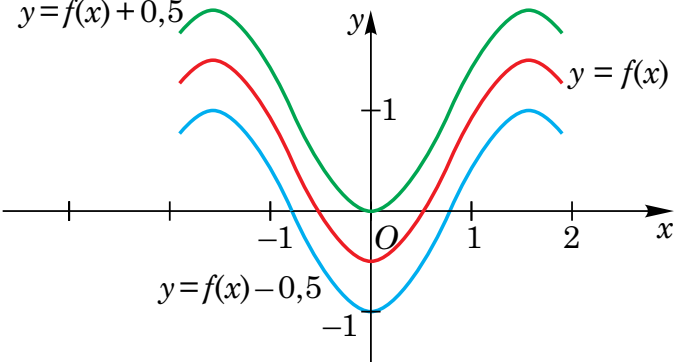
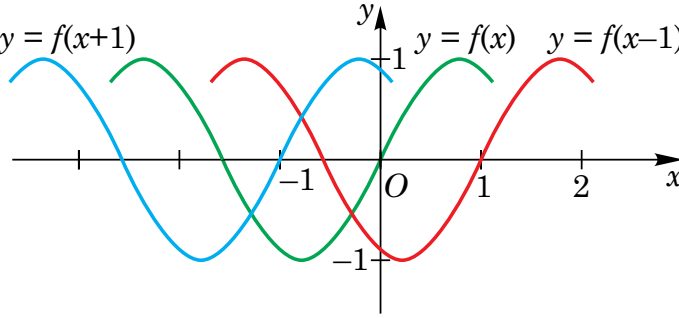
І змінюється за законом $I(t) = I_0 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$, де I_0 — початковий обсяг інформації, t — проміжок часу, за який оцінюється обсяг інформації.

1. Складіть формулу для обчислення обсягу інформації $I(t)$ (в зетабайтах), що буде доступна через t років після 2020-го.
2. Обчисліть обсяг інформації у світі через 10 років після 2020 року.
3. Побудуйте графік функції $I(t)$ на проміжку від 0 до 10 років.
4. За графіком функції оцініть, у якому році інформації стане в 16 разів більше, ніж було в 2020 році.
5. З'ясуйте, що таке зетабайт.

III. Побудова графіків показникових функцій за геометричними перетвореннями графіка показникової функції $y = a^x$

Повторимо основні перетворення графіка функції $y = f(x)$.

$y = -f(x)$	Симетричне відображення графіка відносно осі абсцис.	
$y = f(-x)$	Симетричне відображення графіка відносно осі ординат.	

$y = f(kx),$ $k > 1$	Стиск графіка до осі ординат у k разів. Відстані від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат зменшуються у k разів.	
$y = f(kx),$ $0 < k < 1$	Розтяг графіка від осі ординат у $\frac{1}{k}$ разів. Відстані від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат збільшуються в $\frac{1}{k}$ разів.	
$y = mf(x),$ $m > 1$	Розтяг графіка від осі абсцис в m разів. Відстані від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис збільшуються в m разів.	
$y = mf(x),$ $0 < m < 1$	Стиск графіка до осі абсцис у $\frac{1}{m}$ разів. Відстані від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис зменшуються в $\frac{1}{m}$ разів.	
$y = f(x) + a$	Паралельне перенесення графіка вздовж осі ординат на $ a $ одиниць: - у додатному напрямку, якщо $a > 0$; - у від'ємному напрямку, якщо $a < 0$.	
$y = f(x + b)$	Паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис на $ b $ одиниць: - у додатному напрямку, якщо $b < 0$; - у від'ємному напрямку, якщо $b > 0$.	

$y = f(x) $	Частину графіка, яка лежить над віссю абсцис, залишаємо без змін. Ту частину, яка лежить під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно осі абсцис.	
$y = f(x)$	Частину графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$, залишаємо без змін. Потім її ж симетрично відображаємо відносно осі ординат. Графік функції є об'єднанням двох кривих: $y = f(x)$, $x \geq 0$ і $y = f(-x)$, $x \leq 0$.	

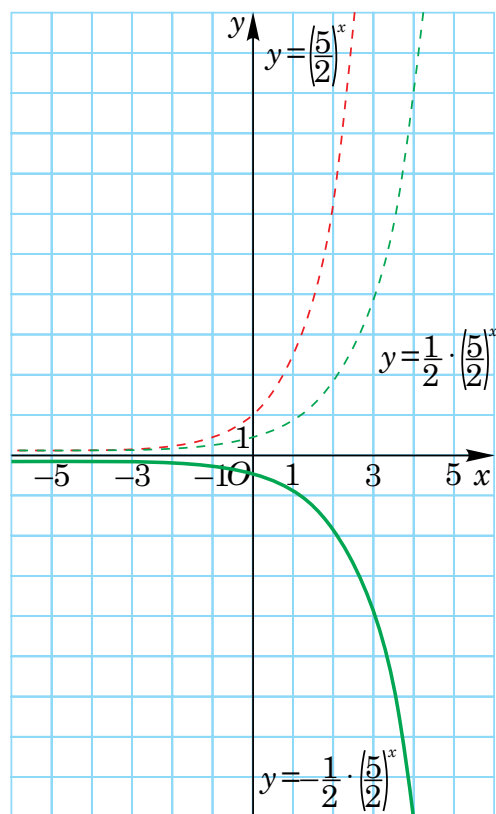
Ілюстративні приклади (5–7 хв)

5. Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x$.

Розв'язання. 1) Будуємо графік зростаючої показникової функції $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$.

2) Будуємо графік функції $y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x$, «стискаючи» графік функції $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ вдвічі до осі абсцис.

3) Будуємо графік функції $y = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x$ шляхом симетричного відображення графіка функції $y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x$ відносно осі абсцис (див. рисунок).

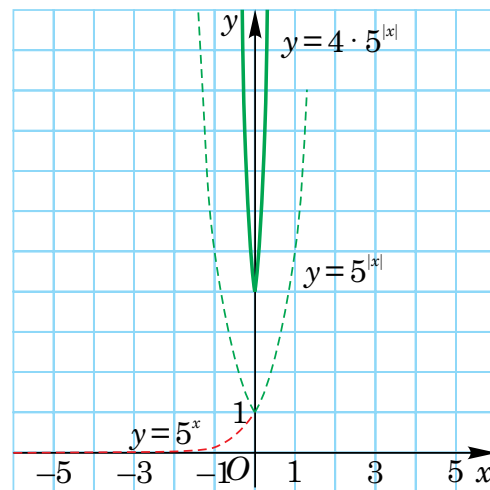


6. Побудуйте графік функції $y = 4 \cdot 5^{|x|}$.

Розв'язання. 1) Будуємо графік зростаючої показникової функції $y = 5^x$.

2) Частину графіка $y = 5^x$, який лежить у півплощині $x \geq 0$, залишаємо без змін. Симетрично відображаємо залишену частину графіка відносно осі ординат. Отримаємо графік функції $y = 5^{|x|}$.

3) Графік функції $y = 5^{|x|}$ «розтягнемо» в 4 рази від осі абсцис, отримаємо графік функції $y = 4 \cdot 5^{|x|}$ (див. рисунок).



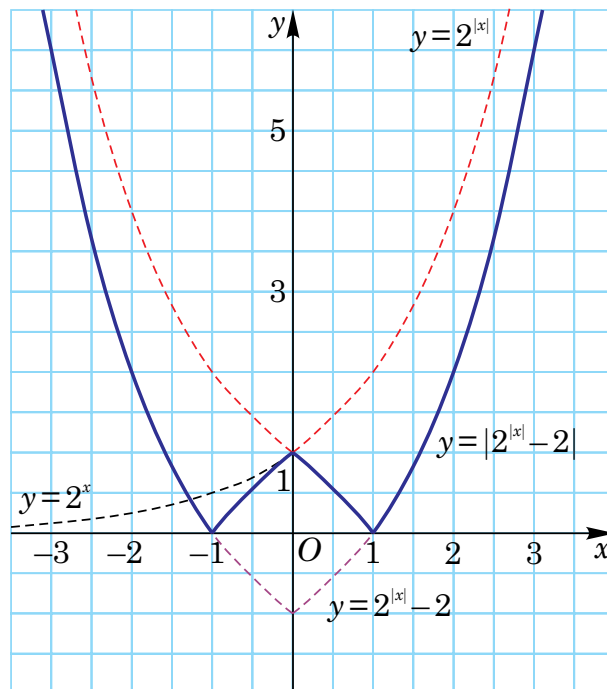
7. Побудуйте графік функції $y = |2^{|x|} - 2|$ та, за графіком, знайдіть множину значень функції.

Розв'язання. 1) Будуємо графік зростаючої показникової функції $y = 2^x$.

2) Частину графіка $y = 2^x$, яка лежить у півплощині $x \geq 0$, залишаємо без змін. Симетрично відображаємо залишену частину графіка відносно осі ординат. Отримаємо графік функції $y = 2^{|x|}$.

3) Графік функції $y = 2^{|x|}$ паралельно перенесемо вздовж осі ординат на дві одиниці у від'ємному напрямі. Отримаємо графік функції $y = 2^{|x|} - 2$.

4) Частину графіка $y = 2^{|x|} - 2$, яка лежить над віссю абсцис, залишаємо без змін. Ту частину, яка лежить нижче осі абсцис, симетрично відображаємо відносно осі абсцис. Отримаємо графік функції $y = |2^{|x|} - 2|$ (див. рисунок).



За графіком, множина значень функції: $E(y) = [0; +\infty)$.

Відповідь. $E(y) = [0; +\infty)$.

IV. Графічний метод розв'язування показникових рівнянь

Графічний метод розв'язування показникових рівнянь, як і графічний метод розв'язування будь-яких інших рівнянь виду $f(x) = g(x)$, полягає у побудові в одній системі координат графіків функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$ і знаходженні абсцис точок перетину графіків.

При розв'язуванні рівнянь графічним методом важливо виконувати перевірку знайдених коренів.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

8. Розв'яжіть графічно рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = x^2 + 1$.

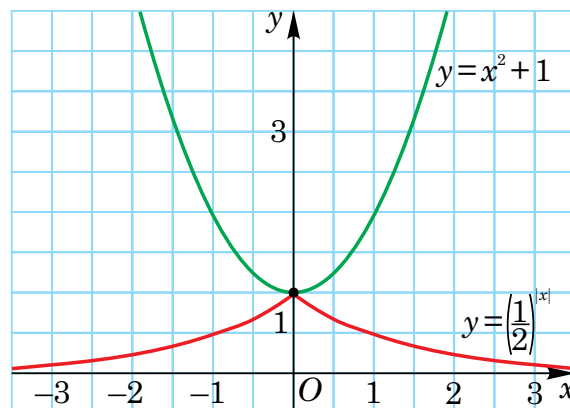
Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ та

$$y = x^2 + 1:$$

Графіки мають єдину точку перетину $(0; 1)$, абсциса якої є коренем рівняння.

Перевіряємо, що $x = 0$ є коренем даного рівняння.

Відповідь. 0.

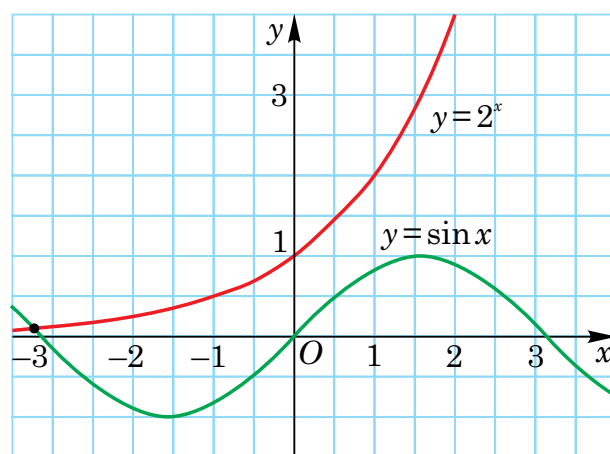


9. Установіть графічно кількість коренів рівняння $2^x = \sin x$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2^x$ та $y = \sin x$.

Оскільки графіки мають безліч точок перетину, то рівняння має безліч коренів.

Відповідь. Безліч.



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (6–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У 2020 році загальний обсяг цифрової інформації у світі становив приблизно 44 зетабайти. За оцінками фахівців, обсяг інформації подвоюється кожні 2 роки.

І змінюється за законом $I(t) = I_0 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$, де I_0 — початковий обсяг інформації, t — проміжок часу, за який оцінюється обсяг інформації.

1. Складіть формулу для обчислення обсягу інформації $I(t)$ (в зетабайтах), що буде доступна через t років після 2020-го.
2. Обчисліть обсяг інформації у світі через 10 років після 2020 року.
3. Побудуйте графік функції $I(t)$ на проміжку від 0 до 10 років.
4. За графіком функції оцініть, у якому році інформації стане в 16 разів більше, ніж було в 2020 році.
5. З'ясуйте, що таке зетабайт.

Розв'язання.

1. Оскільки $I_0 = 44$ зетабайти, то

$$I(t) = 44 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}.$$

2. Обсяг інформації через 10 років:

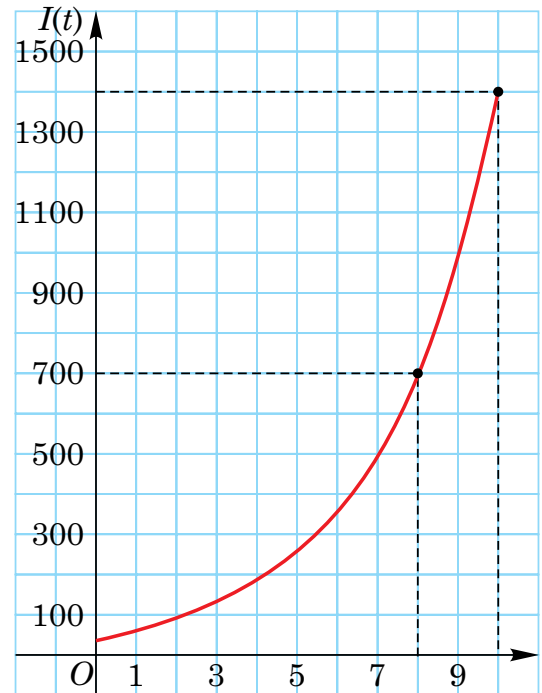
$$I(10) = 44 \cdot 2^{\frac{1}{2} \cdot 10} = 44 \cdot 2^5 = 44 \cdot 32 = 1408 \text{ (зетабайтів)}.$$

3. Графік функції $I(t)$ на проміжку від 0 до 10 років зображено на рисунку.

4. Оскільки $44 \cdot 16 = 704$ ЗБ, то цей обсяг інформації менший від обсягу інформації через 10 років, тобто 1408 ЗБ. За графіком встановлюємо, що зазначений обсяг інформації буде через 8 років, тобто у 2028 році.

Відповідь. 1. $I(t) = 44 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$. 2. 1408 ЗБ.

4. Через 8 років.



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2^x + 1$; 2) $y = 3^x - 1$; 3) $y = 5^x + 1$; 4) $y = (0,5)^x - 2$.

2. Побудуйте графік функції та укажіть множину її значень:

1) $y = 5^x$; 2) $y = 0,5^{|x|}$; 3) $y = 3 - 0,4^x$; 4) $y = 3^{|x|}$.

3. На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше — $\frac{1}{9}$?

4. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = -8^x$; 2) $y = 8^x - 5$; 3) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x + 6$; 4) $y = 8^{|x|}$.

5. Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2 - x^2$; 2) $3^x = \cos x$.

6. При якому значенні a графік функції $y = a^x$ проходить через задану точку:

1) $A(1; 7)$; 2) $C(2; 9)$; 3) $B\left(1; \frac{1}{3}\right)$; 4) $D\left(2; \frac{4}{25}\right)$?

7. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:

- 1) $y = 3^{x-1} + 8$, $[-3; 1]$; 2) $y = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 4$, $[-1; 2]$;
3) $y = 7^{x-2} + 9$, $[0; 2]$; 4) $y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 13$, $[-2; 3]$.

8. Період напіврозпаду деякого ізотопу плутонію дорівнює 140 діб. Визначте масу плутонію, який залишиться через 8 років, якщо його початкова маса дорівнює 6 г.

Рівень В

1. Установіть графічно кількість коренів рівняння:

- 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

2. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = |3^x - 2|$; 2) $y = 3^{|x|} - 1$; 3) $y = 3^{|x+1|} - 1$;
4) $y = |3^x - 1|$; 5) $y = |1 - 3^{|x|}|$; 6) $y = \frac{|1 - 3^{-x}|}{3^{|x|} - 1}$.

3. Побудуйте графік функції на опишіть її основні властивості:

- 1) $y = 3 - (0,5)^x$; 2) $y = 0,5 \cdot 3^{x+2} - 2$; 3) $y = 2^{2x-2}$; 4) $y = 3^{0,5x+1} - 5$.

4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

- 1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

5. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 3^x + \frac{3}{4}$; 2) $y = 5^x - \frac{3}{2}$; 3) $y = (0,4)^x - \frac{1}{3}$; 4) $y = (0,6)^x + \frac{5}{6}$.

6. Знайдіть множину значень функції $f(x) = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$.

7. Знайдіть множину значень функції:

- 1) $y = 5^{\sin x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}$; 3) $y = 1 + 2^{|\sin x|}$; 4) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-|\cos x|} - 1$.

8. Розв'яжіть рівняння графічно:

- 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -\frac{2}{x}$; 2) $2^{-x} = x + 6$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 4 - x$; 4) $2^x = \frac{8}{x}$.

9. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = |2^x - 1|$; 2) $y = |3^x - 2|$; 3) $y = |1 - (0,5)^x|$; 4) $y = \left|\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} - 2\right|$.

10. За 10 років населення країни збільшилось на 10 %. У скільки разів воно збільшиться за наступні 20 років? Скористайтесь формулою $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$, де N_0 — кількість населення країни в початковий момент $t = 0$. Розв'язання проведіть графічним методом.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{\cos x} = x^2 + 2$;

2) $2^{\sqrt{x}} = \cos x$.

2. Дослідіть функцію на парність:

1) $y = 4 \cdot 2^{-x} + 2^{x+2}$; 2) $y = 3^{x-1} + 3^{1-x}$; 3) $y = 2 \cdot 2^{3-|x|}$; 4) $y = 10^{2x} - 0,01^x$.

3. Побудуйте графік функції на опишіть її основні властивості:

1) $y = 0,3^{|x|-2}$; 2) $y = |4 - 2^x| - 1$; 3) $y = 3^{|x+2|} - 3$; 4) $y = 0,5 \cdot |1 - 3^{-x}|$.

4. Побудуйте графік функції на опишіть її основні властивості:

1) $y = 2^{|x-2|+|x+1|} - 1$; 2) $y = 2 - 0,5^{|x+3|-2|x|-x}$; 3) $y = 5 - 2 \cdot 3^{|0,5x-2|}$; 4) $y = 3 - |0,5^{2x-4} - 4|$.

5. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $2^{-x} = 2x + 4$; 2) $0,5^{x-1} - 3 = 5 \cdot 5^x$; 3) $2^x - 2x = 1 - x^2$; 4) $2^x + 3^{x+1} - 1,5 = 0$.

6. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на проміжку:

1) $f(x) = |2^{x-1} - 4|$, $[2; 6]$; 2) $f(x) = |4 - 0,5^{|x|}|$, $[-3; 1]$.

7. Укажіть множину значень функції:

1) $f(x) = 3^{1-x^2}$; 2) $f(x) = 0,3^{|x|} + 1$; 3) $f(x) = 0,5^{x^2-4x+5}$; 4) $f(x) = 5^{-|x-1|}$.

8. Побудуйте графік функції:

1) $y = |2 \cdot 3^x - 1|$; 2) $y = |4^{x-1} - 2|$; 3) $y = \left| 3^{x-2} - \frac{1}{2} \right|$; 4) $y = \left| \left(\frac{1}{3} \right)^x - \frac{1}{3} \right|$.

9. У фізичній лабораторії проводять експерименти над двома різновидами радіоактивної речовини. Кількість першої речовини становить 5 г з періодом її напіврозпаду 3 роки. Кількість другої речовини становить 3 г. Який період напіврозпаду другої речовини, якщо через 12 років їхні кількості зрівняються? Розв'яжіть графічним методом.

VII. Рефлексія (2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
-
-
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
-
-
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-

- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

1. Зростання кількості інформації у світі як приклад експоненціального росту.
2. Зв'язок інфляційних процесів в економіці та показникової функції.
3. Використання показникової функції в машинному навчанні.
4. Експоненціальне зростання населення.
5. Поширення вірусів та графіки показникових функцій.

Список використаних джерел

- 1) Алгебра : підручн. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2011. — Ч. 1. — 256 с. : іл.